TS : correction des exercices sur les représentations paramétriques de droites

I Vrai ou Faux ?

La droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 2 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

a) passe par le point A(-1 ; 0 ; 2)
VRAI : on obtient ces coordonnées pour $t = 0$

b) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

FAUX : un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtenu avec les coefficients du paramètre.

Il est clair que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires donc $\overrightarrow{u}$ n'est pas un vecteur directeur de cette droite.

c) passe par le point B(1 ; -3 ; -1)

VRAI : on regarde s'il existe une valeur de t telle que $\begin{cases} -1 + 2t = 1 \\ -3t = -3 \\ 2 - t = -1 \end{cases}$

La deuxième équation donne $t = 1$ et en remplaçant t par 1, les deux autres équations sont vérifiées. B est atteint pour $t = 1$ et appartient bien à la droite $\mathscr{D}$.

d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

VRAI : Soit $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{w}$ donc $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires ; $\overrightarrow{v}$ est donc également un vecteur directeur de cette droite $\mathscr{D}$.

e) est parallèle à la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = 1 + 3s \\ z = s \end{cases}$, $s \in \mathbb{R}$

VRAI : appelons Δ cette droite ; elle a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ (cf. question précédente). Δ et $\mathscr{D}$ ont comme vecteurs directeurs des vecteurs colinéaires : elles sont bien parallèles.

f) ne coupe pas l'axe des ordonnées
VRAI : les points de l'axe des ordonnées ont une abscisse nulle et une cote nulle ; on cherche donc s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} -1 + 2t = 0 \\ -t = 0 \end{cases}$ qui donne $\begin{cases} t = \dfrac{1}{2} \\ t = 2 \end{cases}$.

Ces deux équations sont incompatibles, donc $\mathscr{D}$ ne coupe pas l'axe des ordonnées.

g) coupe l'axe des cotes au point C(3 ; -6 ; 0)
FAUX : les points de l'axe des cotes ont une abscisse et une ordonnée nulle ; C n'appartient donc pas à cet axe !

II

On munit l'espace d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

Δ passe par les points $B(-1\,;\,2\,;\,3)$ et $C(1\,;\,1\,;\,4)$, donc a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ce vecteur est aussi un vecteur directeur de (d).

Une représentation paramétrique de la droite (d) est alors : $\begin{cases}x=2t\\y=-1-t\\z=2+t\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}$

III

On considère les points A$(0\,;1\,;2)$, B$(1\,;2\,;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

1. Une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est
$\begin{cases}x=x_A+tx_{\vec{u}}\\y=y_A+ty_{\vec{u}}\\z=z_A+tz_{\vec{u}}\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2+t\end{cases}\quad,\ t\in\mathbb{R}}$

2. De même, une représentation paramétrique de la droite (d') passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$ est :
$\boxed{\begin{cases}x=1-s\\y=2+2s\\z=3+s\end{cases}\quad,\ s\in\mathbb{R}}$

3. Le point C(6; -8; -2) appartient à (d) s'il existe t tel que $\begin{cases}t=6\\1+t=-8\\2+t=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=6\\t=-9\\t=-4\end{cases}$, système incompatible. $\boxed{\text{C n'appartient pas à } (d)}$.

   Le point C(6; -8; -2) appartient à (d') s'il existe s tel que $\begin{cases}1-s=6\\2+2s=-8\\3+s=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=-5\\s=-5\\s=-5\end{cases}\Leftrightarrow s=-5$.

   $\boxed{\text{C appartient à } (d') \text{ pour } s=-5}$.

4. (d) et (d') sont sécantes s'il existe un coupe $(t\,;\,s)$ tel que
$\begin{cases}t=1-s\\1+t=2+2s\\2+t=3+s\end{cases}$. On remplace t par $1-s$:
$\begin{cases}t=1-s\\1+1-s=2+2s\\2+1-s=3+s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1-s\\3s=0\\2s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1-s\\s=0\\s=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=0\\t=1\end{cases}$.

En remplaçant s par 0, on obtient $x=1$; $y=2$; $z=3$: on retrouve le point B.

$\boxed{(d) \text{ et } (d') \text{ se coupent en B}}$.

IV

On considère les trois droites dont les représentations paramétriques sont :

$$(d_1)\begin{cases} x=-t \\ y=3+t \\ z=1+2t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

$$(d_2)\begin{cases} x=3+2s \\ y=-2s \\ z=-5-4s \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R}$$

$$(d_3)\begin{cases} x=-2+4u \\ y=1+4u \\ z=1 \end{cases}, \quad u\in\mathbb{R}$$

a) On cherche le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

On résout le système :

$$\begin{cases} -t=3+2s \\ 3+t=-2s \\ 1+2t=4-4s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3-2s \\ 3-3-2s=-2s \\ 1+2(-3-2s)=-5-4s \end{cases} \Leftrightarrow t=-3-2s.$$

Il y a une infinité de couples $(s\,;\,t)$ solutions, ce qui signifie que les deux droites sont **confondues**.

On peut d'ailleurs le vérifier car elles ont des vecteurs directeurs colinéaires et le point de coordonnés $(0\,;\,3\,;\,1)$ appartient aux deux droites pour $t=0$ et $s=-\dfrac{3}{2}$.

Reste à montrer que d_1 et d_3 sont sécantes.

On résout le système : $\begin{cases} -t=-2++4u \\ 3+t=1+4u \\ 1+2t=1 \end{cases}$

On obtient facilement $t=0$ et $u=\dfrac{1}{2}$.

d_1 et d_3 se coupent au point de coordonnées $(0\,;\,3\,;\,1)$