Correction du devoir sur feuille n° 3

I Démonstrations des formules de croissances comparées pour la fonction exponentielle

1) Partie I

On considère la fonction. f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

1. On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$: $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
   $f(0) = 1$.
   Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. On en édit que, pour tout x, $f(x) \geqslant 1$ d'où $\boxed{f(x) > 0}$.
3. Pour tout x, $f(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > x$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$, d'après un théorème de comparaison, on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty}$
4. On pose $x = -x$ donc $x = -X$.
   Alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^X}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0}$

2) Partie II : étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

1. Pour tout x, $\boxed{g'(x) = \mathrm{e}^x - x}$
2. D'après I, $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc g est croissante sur $\mathbb{R}$
3. On en déduit que, pour $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 1$ donc $g(x) > 0$ d'où $\mathrm{e}^x > \dfrac{x^2}{2}$.
   Pour $x > 0$, en divisant par x, on obtient : $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}}$
4. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{2}\right) = 3\infty$, en utilisant un théorème de comparaison, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty}$.
5. On veut calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$.
   Pour cela, on pose $X = -x$.
   (a) On a $x = -X$
   (b) $x\mathrm{e}^x = -X\mathrm{e}^{-X} = -\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$.
   (c) Si x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$.
   (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x}}\right) = \boxed{0}$ puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$

3) Partie III : étude de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1. Pour tout x ; $e^x = \left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n$ et $\dfrac{1}{x} = \dfrac{n}{x} \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\frac{x}{n}} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $\dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \left[\dfrac{1}{\frac{x}{n}} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)\right]^n = \left(\dfrac{1}{\frac{x}{n}}\right)^n \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

   On en déduit : $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2. On pose $X = \dfrac{x}{n}$; on a alors $\dfrac{e^x}{x^n} = \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^{,} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.

   On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^{,} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^n = +\infty$ car $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ est constant et $\lim\limits_{X \to =\infty} \left(\dfrac{e^X}{X}\right) = +\infty/$

   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x^n}\right) = +\infty}$

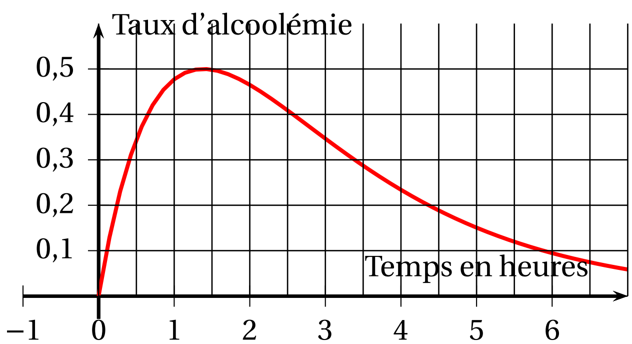
4) Étude de la limite de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

On pose $X = -x$.

1. Puisque $X - -x$, on a : $x = -X$ donc $x^n = (-X)^n = (-1)^n X^n$.
   Alors $x^n e^x = (-1)^n X^n e^{-X} = (-1)^n \times \dfrac{X^n}{e^X}$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{X \to =\infty} \dfrac{(-1)^n (X^n)}{e^X}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{X^n}{e^X} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^n}}\right) = 0$ d'après la partie précédente.
3. On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0}$

II

On a étudié révolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'un homme majeur de 70 kg pendant les cinq heures suivant l'absorption de deux verres de vin au cours d'un repas.
On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) est modélisé en fonction du temps écoulé depuis la consommation (exprimé en heures) par la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 7]$ par $f(t) = 2e^{-\frac{t}{2}} - 2e^{-t}$.



1. Étudions les variations de f :
   $f'(t) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}} - 2 \times \left(-e^t\right) = -e^{-\frac{t}{2}} + e^{-t} = e^{-\frac{t}{2}} \left(-1 + 2e^{-\frac{t}{2}}\right)$ car $e^{-t} = e^{-2 \times \frac{t}{2}} = \left(e^{-\frac{t}{2}}\right)^2$.
   $f'(t) = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\frac{t}{2}} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{2}} = \dfrac{1}{2}$.
   Cette équation a une solution car la fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}}$ est continue, la valeur en 0 est 1 et $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 0$

et on applique le théorème des valeurs intermédiaires. La solution est unique par décroissance de la fonction. La solution α vaut environ 1,39 h.
En fait $\alpha = 2\ln 2$.
La fonction est d'abord croissante puis décroissante :; la concentration est maximum au bout d'environ 1,39 h, donc 1 h 23 min.

2. On étudie le signe de $f''(t)$.
$f''(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} - 2\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\left(1 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)$.
$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{4}$.
On trouve $t \approx 2,77$.
$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 1 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$.
On trouve $t > 2,77$ (environ).
f est convexe pour $2,77 \leqslant t \leqslant 7$ et concave pour $0 \leqslant t \leqslant 2,77$.
3. La diminution du taux d'alcool dans le sang s'accélère au bout de 2,77 h environ soit 2 h 46 min 20 s.

III

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\left(T_n - M\right)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right)$.

1. Le café est chaud au départ, dans une pièce dont la température est fraiche; le café va refroidir et sa température va aller vers celle de la pièce, donc la suite est décroissante.
2. Pour tout n, $T_{n+1} - T_n = -0,2\left(T_n - 10\right) \Leftrightarrow T_{n+1} = \boxed{T_n - 0,2\left(T_n - 10\right) - 0,8T_n + 2}$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   (a) Pour tout n, $u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = 0,8T_n + 2 - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8\left(T_n - 10\right) = 0,8u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = 0,8u_n}$.
   La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = 0,8$ et de premier terme
   $u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70$.
   (b) On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 q^n = 70 \times 0,8^n$ donc, $\boxed{T_n = u_n + 10 = 70 \times 0,8^n + 10}$.
   (c) $-1 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^n = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 10}$.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
    T ← 0,8T + 2
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

   (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   On obtient les valeurs 80; 66; 54,8; 45,84; 38,672.
   À la fin de l'algorithme, n vaut 4.

(b) $\boxed{\text{Au bout de 4 minutes, la température du café est tombée à 40 °C}}$.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0,2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0,2\theta(t)$.

   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

   f est un quotient : $f'(t) = \dfrac{\theta'(t) \times \mathrm{e}^{-0,2t} - \theta(t) \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right)}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2} = \dfrac{-0,2\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t} + 0,2t\theta(t)\mathrm{e}^{-0,2t}}{\left(\mathrm{e}^{-0,2t}\right)^2}$

   $= \boxed{0}$.

   (b) $f(0) = \dfrac{80}{1} = 80$.

   Puisque $f'(t) = 0$ pour tout t, f est **constante**, donc, pour tout t, $f(t) = f(0) = 80$ d'où $\boxed{\theta(t) = 80\mathrm{e}^{-0,2t}}$.

   (c) $\theta(0) = 80$ et $\theta'(t) = 80 \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = -0,2\theta(t)$ donc θ est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0~;~+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{ où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

   Une personne aime boire son café à 40 °C.

   g est dérivable ; $g'(t) = 70 \times \left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = \boxed{-14\mathrm{e}^{-0,2t} < 0}$ donc g est strictement décroisante sur $[0~;~+\infty[$.

   - g est continue (dérivable donc continue ou somme, produit et composée de fonctions continues)
   - $g(0) = 80 > 40$
   - $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = 10 < 40$ car $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}(-0,2t) = -\infty$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 70\mathrm{e}^{-0,2t} = \lim_{T\to-\infty} 70\mathrm{e}^{T=0}$

   D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(t) = 40$ a au moins une solution. Comme la fonction est décroissante, cette solution est unique ; on la note t_0. À la calculatrice, on trouve $t_0 = 4,236$ min, donc environ 4 min 14 s.
   Le café est à une température de 40 °au bout de **4 min 14 s** environ.