Convexité d'une fonction

I Activité B page 1

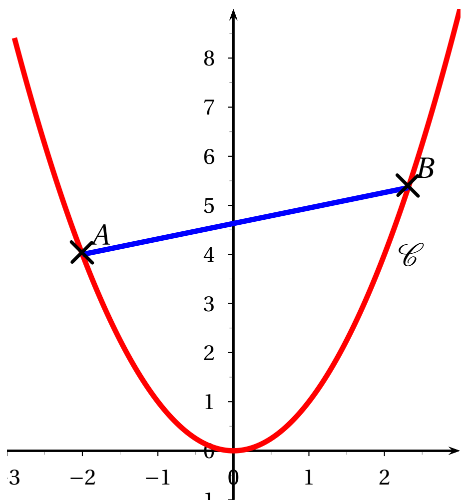
II Fonction convexe

Définition

Si f est dérivable sur un intervalle I et si la dérivée f' est elle-même dérivable, on note f'' la dérivée de f', donc $f'' = \left(f'\right)'$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que f est **convexe** sur I lorsque $\mathscr{C}_f$ est en dessous de chacune de ses sécantes entre deux points d'intersection.



C'est le cas de la fonction carré, représentée ci-dessus.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable.
Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

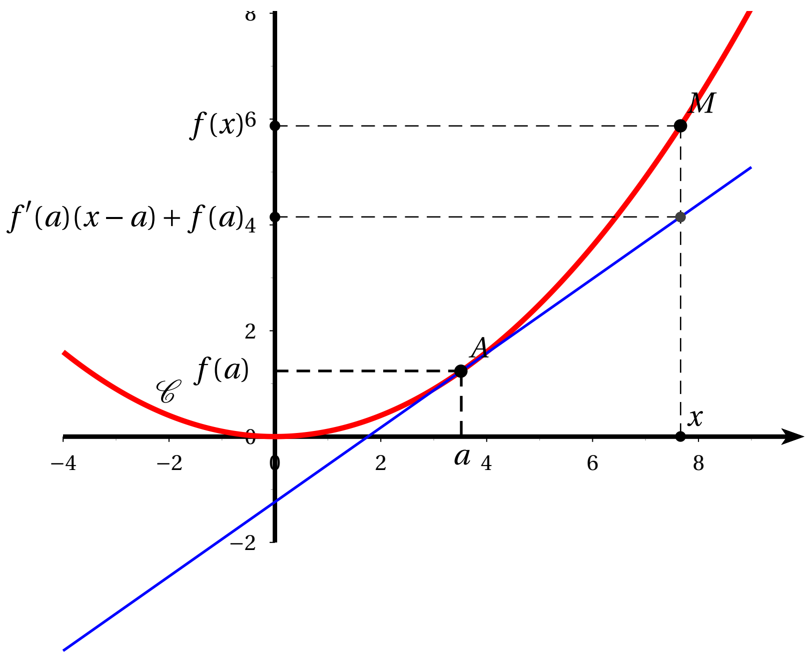
- f est convexe sur I.
- La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- f' est croissante sur I.
- f'' est positive sur I

Démonstration partielle : montrons que si f'' est positive, $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
Soit a un réel de I ; l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - \left[f'(a)(x-a) + f(a)\right]$ (différence des ordonnées d'un point de $\mathscr{C}$ et d'un point de la tangente en a de même abscisse).
g est deux fois dérivable comme différence de fonctions deux fois dérivables.
$g'(x) = f'(x) - f'(a)$ car la dérivée de la fonction affine $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ est $f'(a)$, coefficient directeur de la tangente.
Alors = $g''(x) = f''(x)$.
Par hypothèse, $f''(x) \geqslant 0$ donc $g''(x) \geqslant 0$.
On en déduit que g' est croissante, avec $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
g est donc décroissante pour $x \leqslant a$ puis croissante pour $x \geqslant a$, avec $g(a) = 0$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

Le minimum de g est 0, donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

$\mathscr{C}$ est bien au-dessus de sa tangente.
Illustration ci-dessous



Remarque : f est concave si f' est décroissante ou si $f'' < 0$

III Point d'inflexion

Définition

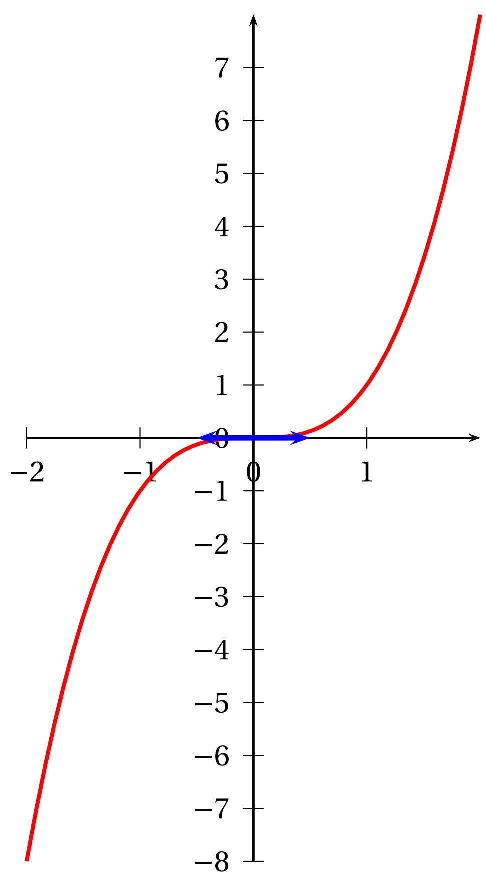
Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.
La fonction change alors de convexité ; elle passe de fonction convexe à concave oui réciproquement.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point abscisse a si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a.

IV Exemple 1

$f(x) = x^3$.
$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$ qui change de signe en 0.
$\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion en 0. La courbe traverse sa tangente en O.



V Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.
f'' s'annule donc une seule fois en changeant de signe en $x = 2$
Le point M de coordonnées $(2\,;\,-9)$est donc le seul point d'inflexion de la courbe, comme on peut le vérifier sur sa représentation graphique.