Correction Baccalauréat S Amérique du Nord

I — 5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

Dans le cadre de son activité, une entreprise reçoit régulièrement des demandes de devis. Les montants de ces devis sont calculés par son secrétariat. Une étude statistique sur l'année écoulée conduit à modéliser le montant des devis par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 2900$ euros et d'écart-type $\sigma = 1250$ euros.

1. $P(X \geqslant \mu) = P(\mu \leqslant X \leqslant 4000) + P(X \geqslant 4000)$ donc $M(X \geqslant 4000) = P(X \geqslant \mu) - P(\mu \leqslant X \leqslant 4000) = 0,5 - P(\mu \leqslant X \leqslant 4000) = 0,5 - P(2900 \leqslant X \leqslant 4000)$.
   À la calculatrice, on trouve : $\boxed{P(X \geqslant 4000) \approx 0,189}$.
2. On cherche à la calculatrice le nombre α tel que $P(x \leqslant \alpha) \leqslant 0,1$ (Sur TI82, on tape FracNormale(0.1,2900,1250).
   On trouve $\boxed{\alpha \approx 1298}$.
   Pour qu'un devis soit pris en compte, son montant minimal doit être de 1 298 €

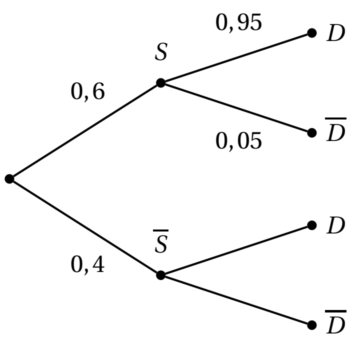
Partie B

Ce même entrepreneur décide d'installer un logiciel anti-spam, Ce logiciel détecte les messages indésirables appelés spams (messages malveillants, publicités, etc.) et les déplace dans un fichier appelé « dossier spam ». Le fabricant affirme que 95 % des spams sont déplacés. De son côté, l'entrepreneur sait que 60 % des messages qu'il reçoit sont des spams. Après installation du logiciel, il constate que 58,6 % des messages sont déplacés dans le dossier spam. Pour un message pris au hasard, on considère les évènements suivants :

- D : « le message est déplacé » ;
- S : « le message est un spam ».

D'après l'énoncé, on a : $\begin{cases} p(S) = 0,6 \\ p_S(D) = 0,95 \\ p(D) = 0,586 \end{cases}$.

Récapitulons la situation par un arbre pondéré :



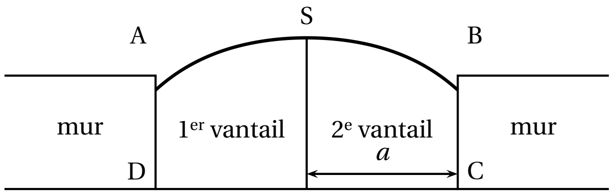
1. $P(S \cap D) = P_S(D) \times P(S) = 0,95 \times 6 = 0,57$; $\boxed{P(S \cap D) = 0,57}$.
2. On choisit au hasard un message qui n'est pas un spam. Montrer que la probabilité qu'il soit déplacé est égale à 0,04.
   $P_{\overline{S}}(D) = \dfrac{P\left(D \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)}$.
   Or $D = (D \cap S) \cup \left(D \cap \overline{S}\right)$ (réunion d'événements incompatibles) donc $P(D) = P(D \cap S) + P\left(D \cap \overline{S}\right)$ d'où $P\left(S \cap \overline{D}\right) = P(D) - P(S \cap D) = 0,586 - 0,57 = 0,016$.
   On en déduit : $P_{\overline{S}}(D) = \dfrac{0,016}{0,4} = \dfrac{0,16}{4} = 0,04$: $\boxed{P_{\overline{S}}(D) = 0,04}$.
3. On choisit au hasard un message non déplacé. Quelle est la probabilité que ce message soit un spam ?
   $P_{\overline{D}}(S) = \dfrac{P\left(S \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{P_S\left(\overline{D}\right) \times P(S)}{P\left(\overline{D}\right)} = \dfrac{0,6 \times 0,05}{1 - 0,586} = \dfrac{0,03}{0,414} = \dfrac{30}{414} = \dfrac{5}{69}$; $\boxed{P_{\overline{S}}(D) = \dfrac{5}{69}}$.
4. Pour le logiciel choisi par l'entreprise, le fabricant estime que 2,7 % des messages déplacés vers le dossier spam sont des messages fiables. Afin de tester l'efficacité du logiciel, le secrétariat prend la peine de compter le nombre de messages fiables parmi les messages déplacés. Il trouve 13 messages fiables parmi les 231 messages déplacés pendant une semaine.
   La proportion de messages fiables déplacés est $p = 2,7\% = 0,027$. La taille de l'échantillonnage est $n = 231$.
   $\begin{cases} n = 231 \geqslant 30 \\ numprint = 231 \times 0,027 = 6,237 \geqslant 5 \\ n(1-p) = 231 \times 0,973 = 224,763 \geqslant 5 \end{cases}$.
   Les conditions pour trouver l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % sont réunies :
   Cet intervalle est :
   $I_{0,95} = \left[p - 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \,;\, p + 1,96\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ $\boxed{\approx [0,0061 \,;\, 0,0}$
   La fréquence (observée) de messages fiables déplacés est $f = \dfrac{13}{231} \approx 0,056 \notin I_{0,95}$.
   Le résultat du contrôle **remet en question** l'hypothèse au seuil de 95 %

II — 5 points

Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de

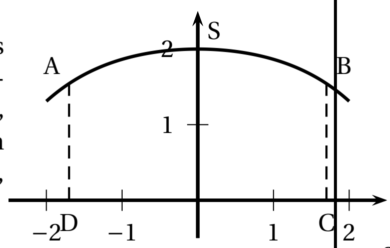


courbe.

Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x)=-\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)+\frac{9}{4}\quad \text{où } b>0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;\,f(-a))$, $(a\,;\,f(a))$, $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Pour tout $x\in[-2\,;\,2]$, $f(-x)=-\dfrac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{-x}{b}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}\right)+\dfrac{9}{4}=f(x)$,

   donc $f(-x)=f(x)$.
   La fonction f est donc paire et la courbe représentative de f est symétiruqe par rapport à l'axe des ordonnées.
2. f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $[-2\,;\,2]$.
   On sait que la dérivée de e^{w} sur un intervalle I est $w'\mathrm{e}^{w}$ si w est une fonction dérivable sur I.
   On en déduit que $f'(x)=-\dfrac{b}{8}\left[\dfrac{1}{b}\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\dfrac{1}{b}\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right]+0$ donc

   $\boxed{f'(x)=-\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\right)}$
3. $f'(x)=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{x}{b}}=\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\Leftrightarrow\dfrac{x}{b}=-\dfrac{x}{b}\Leftrightarrow 2\dfrac{x}{b}=0\Leftrightarrow\boxed{x=0}$.
   $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}$.
   Or $(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}>0\Leftrightarrow\Leftrightarrow(\mathrm{e}^{\frac{x}{b}}>\mathrm{e}^{-\frac{x}{b}}\Leftrightarrow\dfrac{x}{b}>-\dfrac{x}{b}$ (car la fonction exp est croissante), donc $x>0$.
   $f(0)=\dfrac{9-b}{4}$.
   Le tableau de variation de f est donc :

x	-2		0		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(-2)$	$\nearrow$	$\dfrac{9-b}{4}$	$\searrow$	$f(2)$

   Le sommet S a donc pour coordonnées $\boxed{S\left(0\,;\,\dfrac{9-b}{4}\right)}$

Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

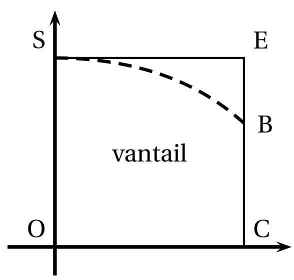
1. On doit avoir $\dfrac{9-b}{4}=2$ donc $9-b=8$ d'où $\boxed{b=1}$.
2. La fonction a alors pour expression : $f(x)=-\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)+\dfrac{9}{4}$.
   - f est continue comme somme et composée de fonctions continues.
   - $f(0)=2>1{,}5$
   - $f(2)\approx1{,}34<1{,}5$

   D'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $f(x)=1{,}5$ admet une solution sur l'intervalle $[0\,;\,2]$; cell-ci est unique car f est monotone sur cet intervalle. Notons-la a.
   À la calculatrice, on trouve $\boxed{\alpha\approx1{,}76}$ (soit par encadrements syccessifs, soit en demandant à la calculatrice de résoudre de manière approchée l'équation).
3. Dans cette question, on choisit $a=1{,}8$ et $b=1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}.On calcule l'aire d'un vantail ; celle-ci vaut $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (en unités d'aire).

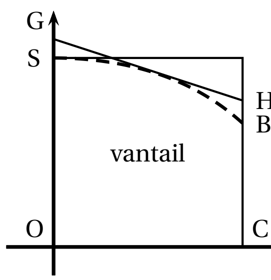
   Une primitive de f est F définie par $F(x)=-\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}\right)+\dfrac{9}{4}x$.
   On en déduit :
   $\mathcal{A}=F(a)-F(0)=-\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{a}+\mathrm{e}^{-a}+\dfrac{9}{4}a\right)-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{1,8}+\mathrm{e}^{-1,8}+\dfrac{9}{4}a\right)-\left(-\dfrac{1}{4}\right)\approx\boxed{3{,}314\text{m}^2}$.
   La densité est de 20 kg par m^2 donc la masse d'un vantail est $m\approx20\times3{,}314\approx\boxed{66{,}28}$ kg, donc plus de 60.
   Le client doit faire automatiser son portail.

Partie C

On conserve les valeurs $a=1{,}8$ et $b=1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un tr

Avec la forme 1, l'aire de bois utilisée est $OL \times OS = 1,8 \times 2 = 3,6$.
L'aire perdue est $\mathscr{A}_1 \approx 3,6 - 3,314 \approx 0,286$ m^2.

Avec la forme 2 :
L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = f'(1)(x-1) + f(1)}$.
Ordonnée de G : on remplace x par 0 : $y_G = f(1) - f'(1) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\right) + \frac{9}{4} + \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{9-\mathrm{e}^{-1}}{4} \approx 2,158$.

Ordonnée de H : on remplace x par 1,8 dans l'équation de la tangente :
$y_H = f'(1)(1,8-1) + f(1) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}\right) + \frac{9}{4} - \frac{0,8}{8}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right) = \frac{-1,8\mathrm{e} - 0,2\mathrm{e}^{-1} + 18}{8} \approx 1,629$.
On déduit que l'aire du trapèze OCGH vaut environ $\frac{1,8 \times (2,158 + 1,629)}{2} \approx 3,408$.
L'aire perdue est alors $\mathscr{A}_2 \approx 3,408 - 3,414 \approx 0,084$ m^2.
On économise donc $\mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 \approx 0,286 - 0,094 = 0,191$ m^2 de bois en choisissant la forme 2.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.
On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n). Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$,
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.

1. On choisit $u_0 = 3$.
   - On doit avoir $u_0 + u_1 = u_0 u_1$ donc $3 + u_1 = 3u_1$ d'où $2u_1 = 3$ qui donne $u_1 = \boxed{\frac{3}{2}}$
   - On doit avoir $u_0 + u_1 + u_2 = u_0 u_1 u_2$ donc $3 + \frac{3}{2} + u_2 = 3 \times \frac{3}{2} \times u_2$ donc $\frac{9}{2} + u_2 = \frac{9}{2} u_2$.
     On en déduit $\frac{7}{2} u_2 = \frac{9}{2}$ donc $u_2 = \boxed{\frac{9}{7}}$.
     On a pour $u_0 = 3$: $\boxed{u_1 = \frac{3}{2}}$ et $\boxed{u_2 = \frac{9}{7}}$.
2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_{n-1}$.
   On a en particulier $s_1 = u_0$.
   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, $s_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = s_n + u_n$; $\boxed{s_{n+1} = s_n + u_n}$
   Comme $s_n = u_0 u_1 \cdots \times u_{n-1}$, on remarque que $\boxed{s_{n+1} = s_n \times u_n}$.
   Tous les termes de la suite sont positifs, donc $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \geqslant u_0 > 1$ donc $\boxed{s_n > 1}$.
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, $s_{n<=1} = s_n + u_n = s_n u_n$ donc $s_n = s_n u_n - u_n = (s_n - 1)\, u_n$.
   On en déduit que : $\boxed{u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}}$ (pour tout $n \geqslant 1$)
   (c) Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n - 1 = \frac{s_n}{s_n - 1} - 1 = \frac{1}{s_n - 1} > 0$ puisque $s_n > 1$ donc $\boxed{u_n > 1}$.
3. À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
   (a) Complétons l'algorithme :

Entrée :	Saisir n
	Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u
	Pour i allant de 1 à n :
	u prend la valeur $\frac{s}{s-1}$
	s prend la valeur $s+u$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher u

   Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de $u_n$pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

   Il semble que la suite soit convergente et converge vers 1.
4. (a) Démontrons par récurrence sur n que $s_n > n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   - Initialisation : $s_1 = u_0 > 1$ par hypothèse donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
   - Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un n quelconque ($n \geqslant 1$), donc $s_n > n$.
     Alors $s_{n+1} = s_n + u_n > n + u_n$ d'après l'hypothèse de récurrence ; or $u_n > 1$ donc $s_{n+1} > n + u_n > n+1$ puisque $u_n > 1$.
     La propriété est donc héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, la propriété $s_n > n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; d'après un théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty}$.
   On a $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1} = \frac{s_n}{s_n\left(1 - \frac{1}{s_n}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}}$.
   Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{s_n}\right) = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$.

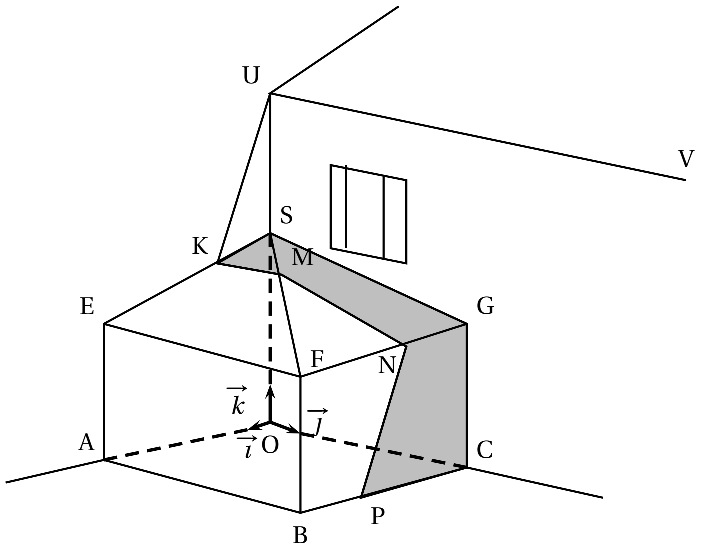
Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.

- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   (a) • D'après les données , la droite (UV) du plan (UVK) et la droite (EF) du plan (SEF) sont parallèles.
   - Les plans (UVK) et (SEF) sont sécants selon la droite (KM).
   - D'après le théorème du toit, les droites (KM), (UV) et (EF) sont parallèles.

   (b) le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
   - Les plans (SOA) et (GCB) sont strictement parallèles.
   - Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP donc le plan (UKV) coupe le plan (SEA) selon la droite (UK).
   - Par conséquent, le plan (UKV) coupe le plan (GCB) selon une droite qui parallèle à (UK) et les droites (UK) et (NP) sont parallèles.

2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4; 0; 0), B(4; 5; 0), C(0; 5; 0), E(4; 0; 2, 5), F(4; 5; 2,5), G(0; 5; 2,5), S(0; 0; 3,5), U(0; 0; 6) et V(0; 8; 6).
   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UV K) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

   (a) Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. On va pour cela utiliser le fait que le point K appartient à la droite (SE).

   Dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$, on a :

   $\overrightarrow{SE}\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$. La droite (SE) passe par $S0\ ;\ 0\ ;\ 3,5$ donc une représentation graphique de la droite (SE) est :

   $$\begin{cases} x=4t\\ y=0 \\ z=-t+3,5\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

   L'abscisse de K est 1,2, la valeur de t correspondante vérifie $4t=1,2$ donc $t=0,3$.

   On en déduit que les coordonnées de K sont $\boxed{K(1,2\ ;\ 0\ ;\ 3,2)}$.

   (b) Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}7\\0\\3\end{pmatrix}$.

   On a $\overrightarrow{UV}\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{UK}\begin{pmatrix}1,2\\0\\-2,8\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs ne sont pas colinéaires donc définissent le plan (UVK).

   $\vec{n}.\overrightarrow{UV}=0+0+0=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{UV}$.

   $\vec{n}.\overrightarrow{UK}=7\times1,2+0+3\times(-2,8)=0$ donc $\vec{n}\perp\overrightarrow{UK}$.

   $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (UVK) donc c'est un vecteur normal à ce plan.

   une équation cartésienne de ce plan est $7(x-x_U)+0\left(y-y_U\right)+3(z-z_U)=0 \Leftrightarrow 7x++3(z-6)=0$ qui donne $7x+3z-18=0$.

   Une équation du plan (UVK) est : $\boxed{7x+3z-18=0}$.

   (c) Soit N l'intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

   $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$ et F(4; 5; 2,5) donc une représentation paramétrique de (FG) est $\begin{cases} x=-4t+4\\ y=5\\ z=2,5\end{cases}$.

   On remplace dans l'équation du plan (UVK) : on en déduit :

   $7(-4t+4)+3\times2,5-18=0 \Leftrightarrow \boxed{t=\dfrac{5}{8}}$.

   Les coordonnées de N sont donc $N\left(\dfrac{3}{2}\ ;\ 5\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)$.

   (d) Pour construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda :
   - on construit donc la droite parallèle à (EF) passant par le point K. Elle coupe le segment [SF] en M ;
   - on trace le segment [MN] ;
   - on trace la droite parallèle à la droite (UK) passant par le point N. Elle coupe le segment [BC] en P ;
   - on trace le segment [NP].

3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°.

   On appelle G_1 le projeté orthogonal de G sur la droite (SO), c'est-à-dire le point du segment $[SO]$ tel que le triangle SGG_1 soit rectangle en G_1.

   Le point G_1 a la même cote que le point $G(0\ ;\ 5\ ;\ 2,5)$.

   Alors : $SG_1=3,5-2,5=1$; $G_1G=y_G=5$.

   Dans le triangle rectangle SGG_1 : $\tan\widehat{SGG_1}=\dfrac{SG_1}{G_1G}=\dfrac{1}{5}$; on en déduit que $\widehat{SGG_1}\approx 11$ °. La condition est donc remplie.