Produit scalaire

I Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et trois points O, A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$.

1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires :

Définition

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le nombre réel (scalaire) défini par :

- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de même sens, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = OA \times OB$.
- si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de sens opposés, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -OA \times OB$.

Remarque :
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2$

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Définition

On définit le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ par : $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = OA^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

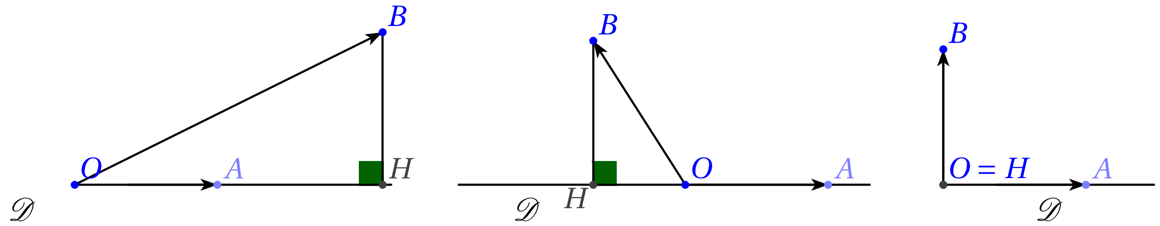
Exemple :

On munit une droite $\mathscr{D}$ d'un repère $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\right)$. On considère les points $A(4)$, $B(7)$, $C(8)$, $D(-3)$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$.

2 Produit scalaire de deux vecteurs quelconques :

Définition

Le projeté orthogonal d'un point B sur une droite $\mathscr{D}$ ($B \notin \mathscr{D}$), est le point H de $\mathscr{D}$ tel que les droites $\mathscr{D}$ et (BH) soient perpendiculaires.
Si $B \in \mathscr{D}$, son projeté orthogonal sur $\mathscr{D}$ est lui-même.



Définition

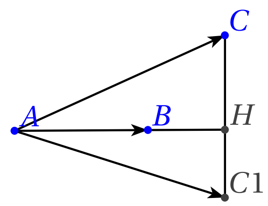
Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on définit leur produit scalaire par : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$, où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

3 Vecteurs orthogonaux

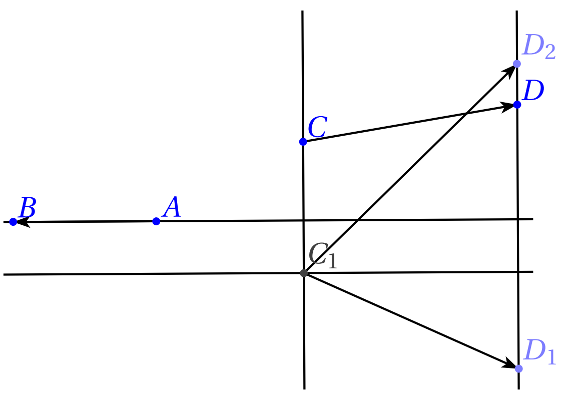
Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est nul.

Conséquences :



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

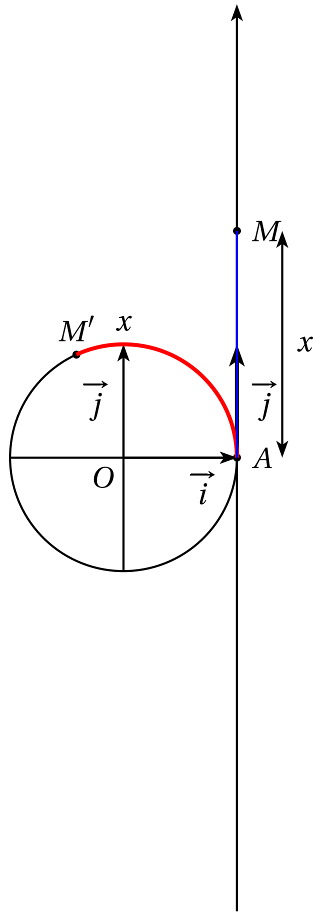


$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C_2D_2}$.

Exemple : Exercice n° 6 page 207

II Rappels de trigonométrie

1 Radian



Rappel : on appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit $\mathscr{C}$ un cercle trigonométrique, muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Soit A le point tel que $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$ et $\mathscr{D}$ la droite tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par $\mathscr{D}$.
On munit cette droite du repère $\left(A\,;\,\vec{j}\right)$.

On enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, la demi-droite supérieure s'enroulant dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre, q'on appelle aussi sens direct ou sens trigonométrique.
Soit M un point quelconque de $\mathscr{D}$; il vient se placer après enroulement en M'.
La longueur du segment $[AM]$ est alors égale à longueur de l'arc de cercle $\widehat{AOM'}$
Si $AM = \alpha$, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AOM'}$ mesure aussi x unités et l'angle au centre correspondant $\widehat{AOM}$ mesure α radians.
1 radian est donc la mesure de l'angle au centre d'un arc de cercle de longueur 1 unité (dans un cercle trigonométrique).

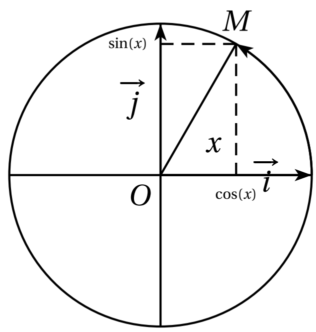
Remarque : quand on fait un tour de cercle complet de longueur 2π (périmètre du cercle), l'angle au centre correspondant mesure donc 2π radians.
Par conséquent, on a la correspondance : $360°=2\pi$ radians

2 Cosinus et sinus d'un angle x

Soit M un point du cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ et soit x une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$.

Définition

On appelle cosinus de x et sinus de x les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
On note : $M\,(\cos(x)\,;\,\sin(x))$



Remarques :
À chaque point M du cercle correspondent plusieurs angles ; en effet, quand on enroule la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$, des points viennent se superposer, espacés d'une longueur sur la droite de 2π ; les angles diffèrent donc de 2π.
Si x est une mesure de l'angle en radians, $x + 2\pi$ aussi et plus généralement $x+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On écrit souvent $\cos x$ et $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ et $\sin(x)$

3 Propriétés élémentaires :

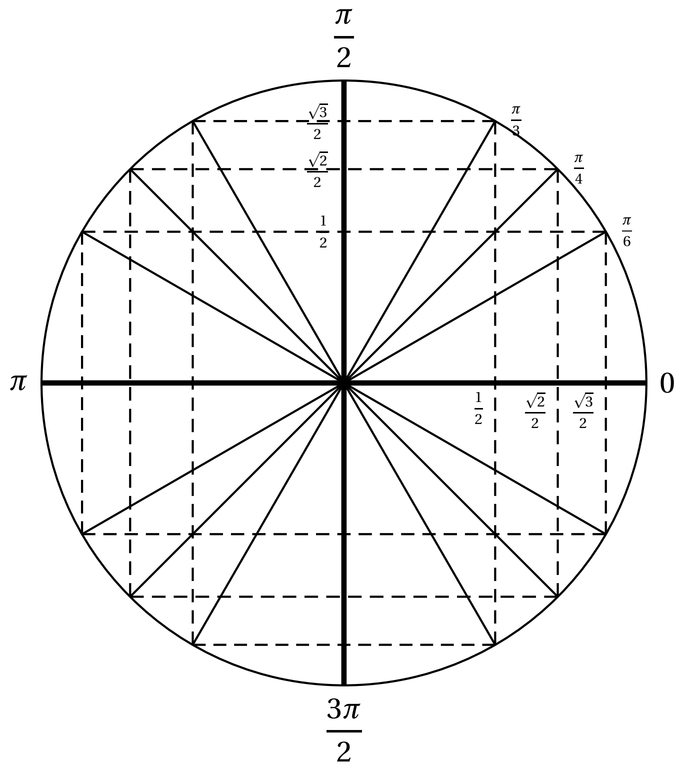
Propriétés élémentaires

- $-1 \leq \cos x \leq 1$
- $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$)
- $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ (pour tout $k \in \mathbb{Z}$)
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4 Valeurs particulières

Pour trouver les valeurs de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ pour $x = \frac{\pi}{6}$ et/ou $\frac{\pi}{3}$, on considère un triangle équilatéral de côté 1 et on trace une hauteur.
La hauteur h du triangle équilatéral vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (avec le théorème de Pythagore). Pour $\frac{\pi}{4}$, on coupe un carré de côté 1 par une des diagonales. La diagonale du carré mesure $\sqrt{2}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	0



5 Fonction cosinus et sinus

On remarque que ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 2π, donc on restreint l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π.

sin est impaire et cos est paire.

On restreint donc les intervalle d'étude à la partie positive d'un intervalle de longueur 2π, centré sur l'origine, c'est-à-dire à $[0\,;\,\pi]$.

Le signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$ se déduit de la définition de ces deux fonctions.

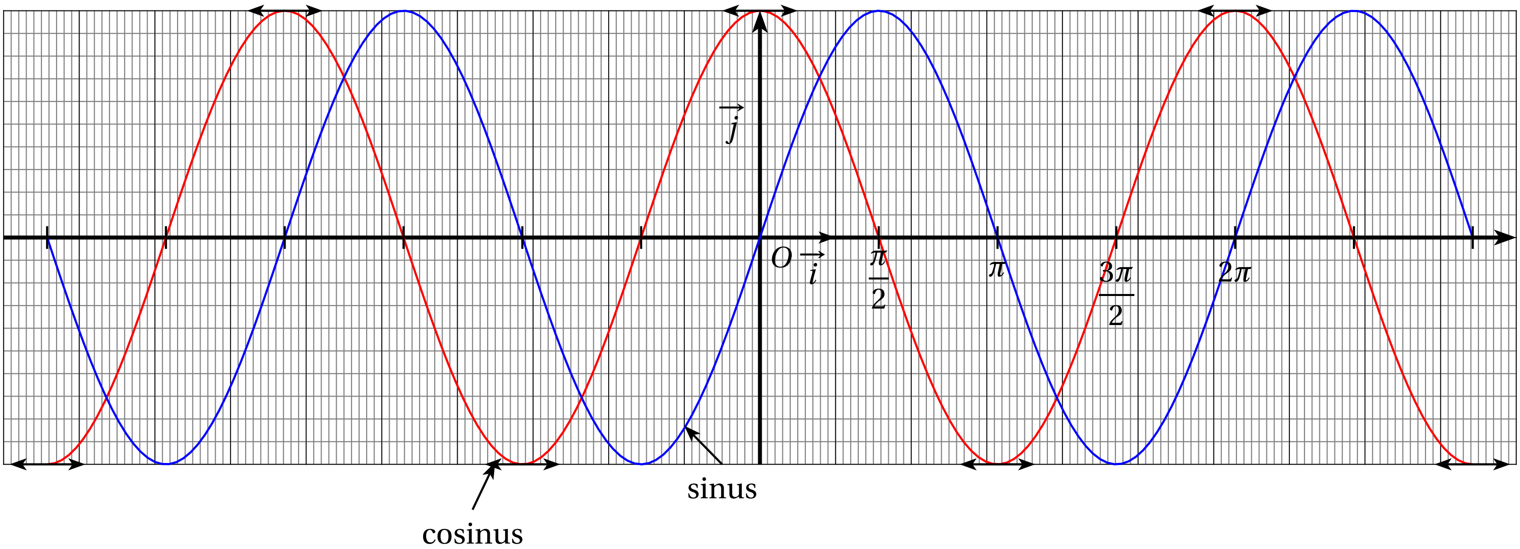
On sait que $\sin'(x) = \cos(x)$ et $\cos'(x) = \sin(x)$.

On obtient alors les tableaux de variations des deux fonctions :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		π
$\cos'(x) = -\sin(x)$		$-$	
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

On peut alors tracer les deux courbes, sans oublier les tangentes, sur l'intervalle $[0 ; \pi]$;
on complète alors les courbes par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées pour l'une et par rapport à O pour l'autre.
Les fonctions étant périodiques de période 2π, les courbes sur $\mathbb{R}$ se déduisent alors du morceau tracé par translations de vecteur $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



On remarque que la courbe représentative de la fonction sinus s'obtient à partir de la coubre représentative de la fonction cosinus par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

III Angles orientés

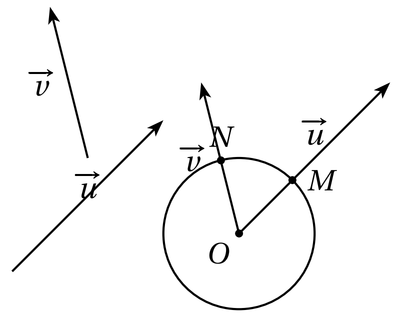
1 Notations

$\vec{u}$ et v sont des vecteurs non nuls, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique.

Définition

Le couple $(\vec{u} ; \vec{v})$ est appelé **angle orienté** de vecteurs.

On note M et N les intersections des demi-droites d'origine O et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ avec le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$.



2 Mesure d'un angle

Propriété

Si x est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$, alors toutes les mesures de $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ sont de la forme $x+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On dit que l'angle $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ a pour mesure x modulo 2π ou à 2π près.
Par abus, on assimile l'angle à sa mesure et on écrit $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = x\ [2\pi]$

Cas particuliers :

- Angle nul : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{u}\right) = 0\ [2\pi]$
- Angle plat : $\left(\vec{u}\ ;\ -\vec{u}\right) = \pi\ [2\pi]$
- Angle droit :
  Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{3\pi}{2}\ [2\pi]$

Propriété

Soient M et N deux points du cercle trigonométrique tels que $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right) = x\ [2\pi]$ et $\left(\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right) = y\ [2\pi]$, une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$ est $y-x\ [2\pi]$.

Propriété

L'angle orienté $\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$ a une unique mesure dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Cette mesure est appelée mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right)$.

Exemple : Déterminer la mesure principale de l'angle $-\dfrac{17\pi}{3}$.
$-\dfrac{17\pi}{3} = -\dfrac{17}{3} \times \pi$; on a : $-6 < -\dfrac{17}{3} \leqslant -5$ donc $0 \leqslant -\dfrac{17}{3} + 6 \leqslant 1$.
Par conséquent : $0 \leqslant -\dfrac{17}{3}\pi + 6\pi \leqslant \pi$; la mesure principale de $-\dfrac{17\pi}{3}$ est $-\dfrac{17\pi}{3} + 6\pi = \dfrac{\pi}{3}$.

IV Propriété des angles orientés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u'}$ et $\vec{v'}$ des vecteurs non nuls.
Soient θ une mesure de $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ et θ' une mesure de $\left(\vec{u'}\ ;\ \vec{v'}\right)$.

Propriété

$\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \left(\vec{u'}\ ;\ \vec{v'}\right) \Leftrightarrow \theta = \theta'\ [2\pi]$

Relation de Chasles

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) + \left(\vec{v}\ ;\ \vec{w}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$

Démonstration :

Soient M, N et P les points du cercle trigonométrique tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OP}$.
On note a, b et c une mesure des angles $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{u}\right)$, $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{v}\right)$ et $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{w}\right)$.
Alors : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{ON}\right) = b - a$; $\left(\vec{v}\ ;\ \vec{w}\right) = \left(\overrightarrow{ON}\ ;\ \overrightarrow{OP}\right) = c - b$.
Alors : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) + \left(\vec{v}\ ;\ \vec{w}\right) = (b-a) + (c-b) = (c-a) = \left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OP}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{w}\right)$.

Conséquences :

- Angle opposés : $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = -\left(\vec{v}\ ;\ \vec{u}\right)\ [2\pi]$.
- Angles égaux : $\left(-\vec{u}\ ;\ -\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)\ [2\pi]$
- Angles supplémentaires : $\left(\vec{u}\ ;\ -\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) + \pi\ [2\pi]$; $\quad \left(-\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)\ ]2\pi]$.

Pour démontrer ces propriétés, on se ramène dans le cercle trigonométrique.

Propriétés

k et k' sont des réels non nuls.

- Si k et k' sont de même signe, alors $\left(k\vec{u}\ ;\ k'\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$.
- Si k et k' sont de signe contraire, alors $\left(k\vec{u}\ ;\ k'\vec{v}\right) = \left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) + \pi$.

Exemple :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
$\left(2\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; $\left(-3\vec{u}\ ;\ -7\vec{v}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
$\left(-\vec{u}\ ;\ -5\vec{v}\right) = \dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dfrac{5\pi}{3}\ [2\pi]$.

Propriété

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si, et seulement si, $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = 0\ [2\pi]$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de senscontraire si, et seulement si, $\left(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\right) = \pi\ [2\pi]$.

Exercice corrigé page 53

ABC est un triangle équilatéral direct. CBD, ACE, AFB sont des triangles rectangles isocèles directs respectivement en D, E et F.
Déterminer la mesure principale des angles $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right)$, $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right)$, $\left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$, $\left(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{CA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{EA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$.

Solution :

- $\left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{4} \in]-\pi\ ;\ \pi]$.
- $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right) = \left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{6} \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

- $\left(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\pi=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4\pi}{3}\notin]-\pi\,;\,\pi]$: La mesure principale de cet angle est $-\dfrac{2\pi}{3}$.
- $\left(\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)+\pi=\left(\overrightarrow{CD}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}\,;\,\overrightarrow{CA}\right)+\pi=-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{3}+\pi=-\dfrac{7\pi}{12}+\pi=\dfrac{5\pi}{12}\in]-\pi\,;\,\pi]$.
- $\left(\overrightarrow{EA}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{EA}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{AE}\,;\,\overrightarrow{AC}\right)+\pi+\left(\overrightarrow{CA}\,;\,CB\right)+\pi=-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{\pi}{12}+2\pi$; or $\dfrac{\pi}{12}\in]-\pi\,;\,\pi]$ donc la mesure principale de ce angle est $\dfrac{\pi}{12}$.

V Trigonométrie

1 Angles associés

1. **Angles opposés :**
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(-x)=\cos(x)$ et $\sin(-x)=-\sin(x)$.
2. **Angles supplémentaires :**
   Pour tout x : $\begin{cases}\cos(\pi-x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)\end{cases}$
3. **Angles complémentaires :**
   Pour tout x : $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{cases}$ et $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{cases}$

VI Repérage polaire

Définition

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\right.$ un repère d'une droite du plan.

Pour tout point M du plan, différent de O, on appelle r la distance OM et θ une mesure de l'angle $\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OM}\right)$.
$(r\,,\,\theta)$ forment un couple de coordonnées polaires de M.
O est appelé pôle et $(O\,;\,\vec{i}\,)$ est l'axe polaire.

Théorème

Dans un repère orthormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, si un point M, $M\neq O$ a pour coordonénes cartésiennes $(x\,;\,y)$ et pour coordonnées polaires $(r\,;\,\theta)$, alors :

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnée polaires :

- $r=\sqrt{x^2+y^2}$
- $\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Passage des coordonnées polaires aux coordonnée cartésiennes :

- $x=r\cos\theta$
- $y=r\sin\theta$

Exemples :

1. Déterminer les coordonnées polaires $(r\ ;\ \theta)$ des points $A(0\ ;\ -7)$, $B\left(-2\ ;\ -2\sqrt{3}\right)$.
2. Déterminer les coordonnée cartésiennes de $C\left(5\ ;\ \dfrac{\pi}{6}\right)$ et $(D\ ;\ 0)$.

VII Autres expressions et propriétés du produit scalaire

1 Lien entre produit scalaire et cosinus

Théorème

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{v}||\cos(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})$.

Démonstration :

2 Propriétés du produit scalaire

Propriétés

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ des vecteurs et k un réel.

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$ (le produit scalaire est symétrique)
- $(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
  $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ (le produit scalaire est bilinéaire)

Identités remarquables

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$
- $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$
- $||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$

3 Expression analytique du produit scalaire :

Le plan est uni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Théorème

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. Alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Démonstration : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
Alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx'\,\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} + xy'\,\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} + x'y\,\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} + yy'\,\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = xx' + yy'$ car $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$ et $\overrightarrow{i}^2 = \overrightarrow{j}^2 = 1$.

Conséquences :

$\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2 = x^2 + y^2$. Par conséquent : $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Calcul d'une distance : $AB = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y_b - y_A)^2}$.

4 Lien entre produit scalaire et norme

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)$ ou $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)$

Cas du parallélogramme : On en déduit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB^2 - BC^2\right)$.

VIII Applications du produit scalaire

1 Équation d'une droite de vecteur normal $\overrightarrow{n}$

Définition

Un vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$ est un vecteur non nul, orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriété

Caractérisation d'une droite :
Soit A un point du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul. L'ensemble des points M du plan tels que $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$ est la droite passant par A et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Démonstration :

Soit B tel que $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$. Comme $\vec{n} \neq \vec{0}$, $A \neq B$.
Si $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0$; les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont alors orthogonaux.
M appartient donc à la droite perpendiculaire à (AB) passant par A.
Réciproquement : si M appartient à la perpendiculaire à (AB) passant par A, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux ; donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 0$, d'où : $\vec{n}.\overrightarrow{AM} = 0$.

Propriété

Caractérisation analytique d'une droite dans un repère orthonormal

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

Une droite admet $\vec{n}$ comme vecteur normal si, et seulement si, elle admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Démonstration :

On cherche une équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(x_A\ ;\ y_A)$ et admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal. Si $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{D}$, alors $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$, soit $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ d'où $ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.
Réciproquement : considérons la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Comme $a \in \mathscr{D}$, $ax_A + by_A + c = 0$, soit $ax + by + c = ax_A + by_A + c$.
On obtient $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ d'où $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0$, en prenant $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

2 Équation d'un cercle

Théorème

Dans un repère orthonormal, le cercle $\mathscr{C}$, de centre $\Omega(a\ ;\ b)$ et de rayon r admet pour équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Démonstration :

$M(x\ ;\ y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Exemples :

Quel est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant : $x^2 - 10x + y^2 - 6y + 27 = 0$?
Quel est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ vérifiant : $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 1 = 0$?

Théorème

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration :

- Si $M = A$ ou $M = B$, l'égalité est vérifiée.
- Sinon, M appaatient au cercle si, et seulement si, le triangle AMB est rectangle en M, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

3 Relations dans un triangle

Théorème de la médiane

Soient A et B deux points et I le milieu de $[AB]$.

Pour tout point M du plan, $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$.

Démonstration :

On utilise la relation de Chasles :

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IB}\right)^2 = 2MI^2 + IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Exemple : Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = 9$ avec $AB = 4$

Formule d'Al-Kashi (ou théorème de Pythagore généralisé)

(mathématicien perse (Ghiyath al-Kashi) qui a vécu entre 1380 et 1429.)

Soit ABC un triangle ; on note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

Alors :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos\widehat{C}$

Démonstration : à l'aide du produit scalaire.

Formule des aires

Soit $\mathscr{S}$ l'aire du triangle ABC. On a :

$\mathscr{S} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \dfrac{1}{2}ab\sin\widehat{C}$

Démonstration :

Démontrons $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Il suffit de faire une figure avec $\widehat{A}$ aigu, droit ou obtus et d'appliquer la formule de l'aire que l'on connat.

Formule des sinus

Toujours avec les mêmes notations, on a :

$\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}$

Démonstration : on utilise la formule des aires, en divisant tout par $2abc$.

Application : exercice n° 94.

4 Formules de trigonométrie

Formules

Pour tous réels a et b :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Démonstration :

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère les vecteurs unitaires (de norme 1), tels que $\left(\vec{i}\,;\,\vec{u}\right) = a$ et $\left(\vec{i}\,;\,\vec{v}\right) = b$.
La relation de Chasles donne : $\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = b - a\ [2\pi]$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$:
$\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
On calcule alors $\vec{u}.\vec{v}$ de deux façons différentes ;
$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos\left(\vec{u}\,;\,\vec{v}\right) = 1 \times 1 \times \cos(b-a)$.
D'autre part : $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a + \sin b$
Comme $\cos(b-a) = \cos(a-b)$, on en déduit :
$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a + \sin b$.
On obtient la formule $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a + \sin b$, en remplaçant b par $-b$.
Pour $\sin(a-b)$, on remarque que :
$\sin(a-b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + b\right) - a\right)$
$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + b\right)\cos a + \sin\left(\frac{\pi}{2} + b\right)\sin a = -\sin b \cos a + \cos b \sin a = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
La quatrième formule s'obtient en remplaçant b par $-b$.

Formules de duplication

En prenant $a = b$, on obtient les formules suivantes, dites formules de duplication :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

Formules de linéarisation

Les formules précédentes donnent :

- $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$
- $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$

Exercices