

Limites et continuité des fonctions

Table des matières

I	Limite infinie en ∞	1
II	Limite finie en ∞	3
III	Limite en un réel a	4
III.1	Limite infinie en a	4
III.2	Limite finie en a	5
IV	Opérations sur les limites	5
IV.1	Somme	5
IV.2	Produit	5
IV.3	Quotient	6
IV.4	Exemples	6
V	Notion de continuité	7
V.1	Notion intuitive de continuité	7
V.2	Continuité des fonctions de référence	8
VI	Théorème des valeurs intermédiaires	8
VI.1	Cas d'un intervalle fermé	8
VI.2	Cas d'une fonction strictement monotone	9
VI.3	Extension à d'autres intervalles	9
VI.4	Exemples	9

I Limite infinie en ∞



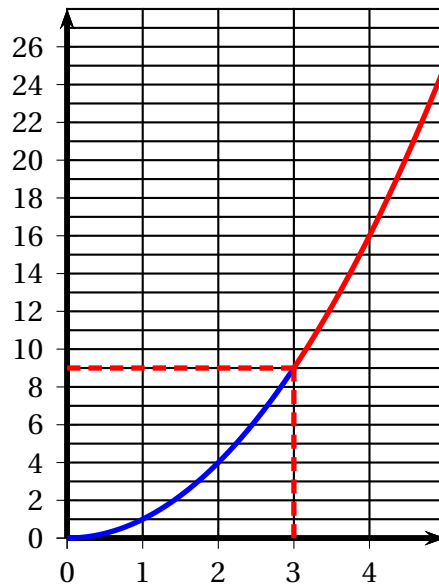
Définition

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

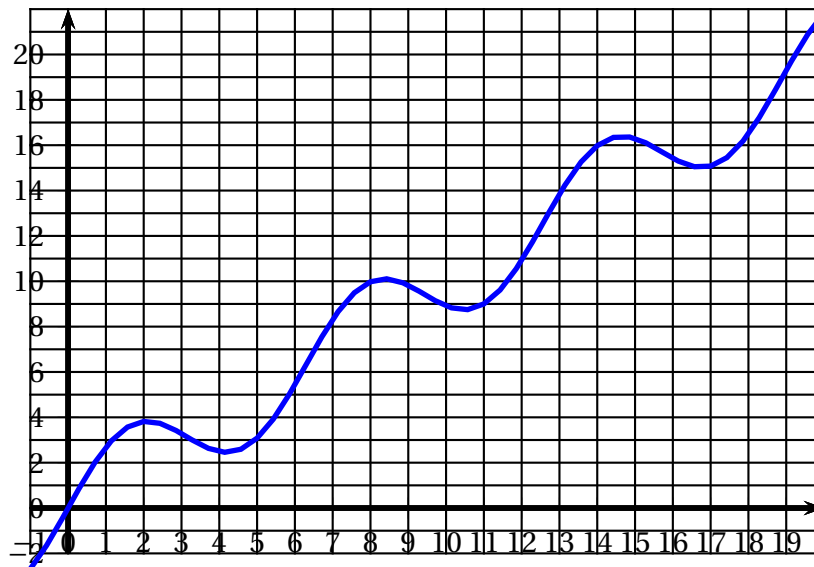
Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple : La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.



Pour A quelconque positif, $f(x) = x^2 > A$ pour $x > \sqrt{A}$.

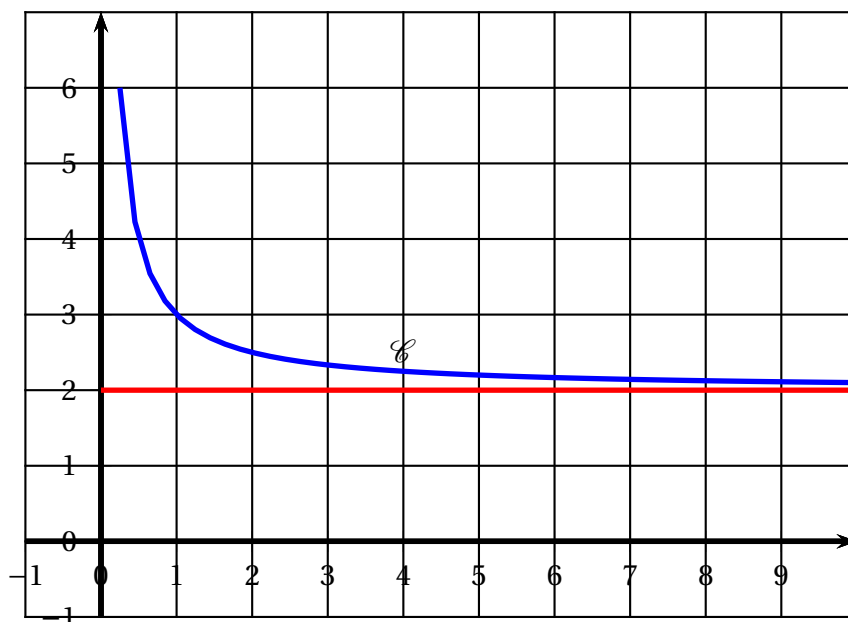
Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante! **Exemple :**



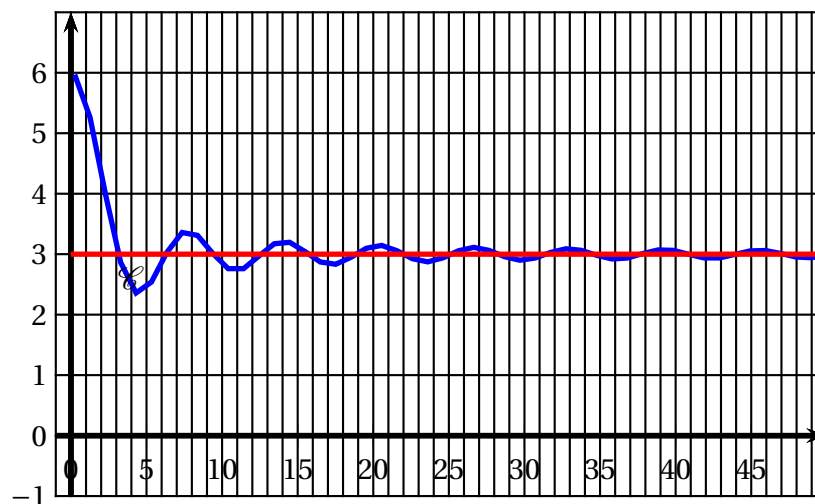
II Limite finie en ∞

Exemples graphiques :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x}$$



$$f(x) = 3 \left(1 + \frac{\sin(x)}{x} \right)$$



Définition

Soit a un réel.

Dire que $f(x)$ tend vers a quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de a , pour x suffisamment grand (ou petit).

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$.

On dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ ou en $-\infty$.

III Limite en un réel a

III.1 Limite infinie en a



Définition

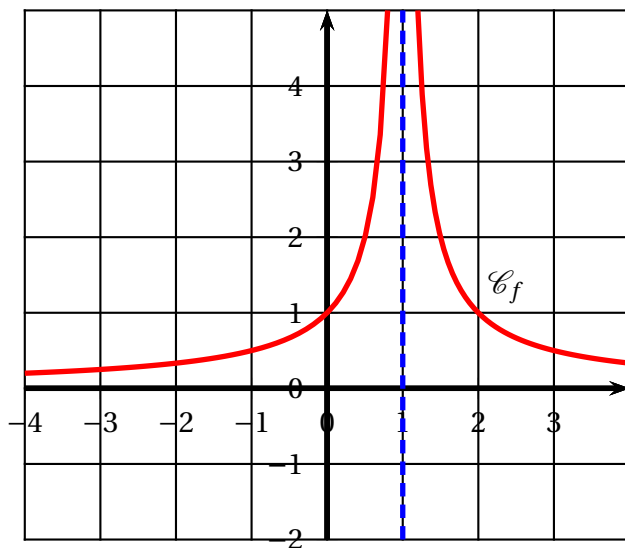
Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x très proche de a .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe.

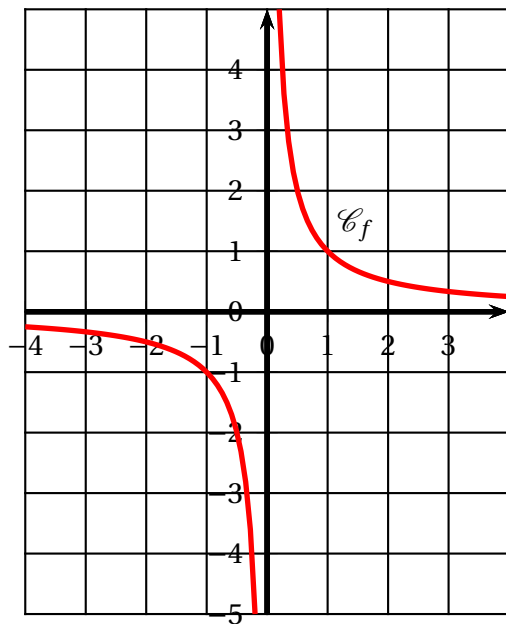
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue quand x est très proche de a .

Exemples :



Remarque : il peut y avoir une limite différente à gauche et à droite .

Fonction inverse :



III.2 Limite finie en a

 **Définition**

Soit une fonction définie sur un intervalle I . Soient a et ℓ deux réels.

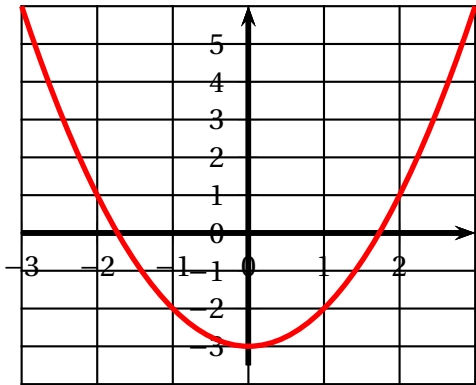
On dit que f admet ue limite ℓ lorsque x tend vers a si les valeurs de $f(x)$ dont aussi proches de ℓ que l'on veut quand x est très proche de a .

On écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

Exemple : $f(x) = x^2 - 3$.

Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2, x^2 est très proche de 4, donc $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de $f(2) = 1$

On a donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.



IV Opérations sur les limites

f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels. Le symbole ∞ désigne $-\infty$ ou $+\infty$. Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $-\infty$, $+\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

IV.1 Somme

Si $\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim(f + g) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

IV.2 Produit

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
Si $\lim g =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(fg) =$	$\ell \ell'$	∞	∞	Forme indéterminée

Pour trouver le signe de la limite d'un produit, on utilise la règle du signe d'un produit.

IV.3 Quotient

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
Si $\lim g =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim \left(\frac{f}{g} \right) =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞ s'il y a une limite	0	∞	Forme indéterminée	Forme indéterminée

IV.4 Exemples

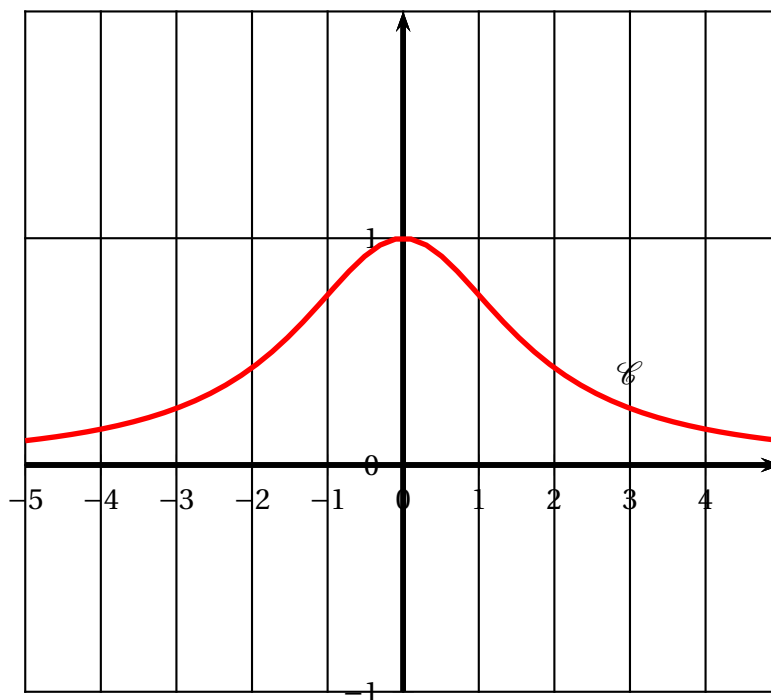
1. Étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ avec $h(x) = \frac{3}{x^2 + 3}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$.

La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_h$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Remarque : on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est aussi asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.

Courbe représentative :



2. Soit la fonction $f : x \mapsto 5 + \frac{1}{x+2}$ définie sur $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$.

Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 , par valeurs inférieures à -2 .

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x + 2) = 0$ avec $x + 2 < 0$.

Alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(\frac{1}{x+2} \right) = -\infty$.

Par somme, on en déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \left(5 + \frac{1}{x+2} \right) = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$.

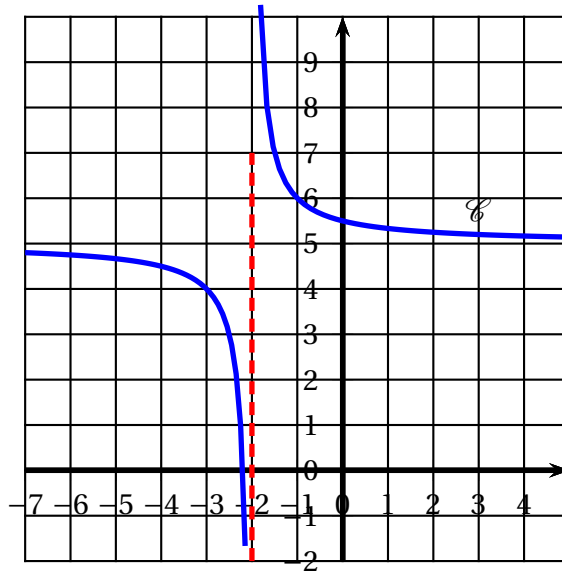
La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x+2) = 0$ mais avec $x+2 > 0$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \left(\frac{1}{x+2} \right) = +\infty$ d'où :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = -2$ est encore asymptote à la courbe.

Courbe :



V Notion de continuité

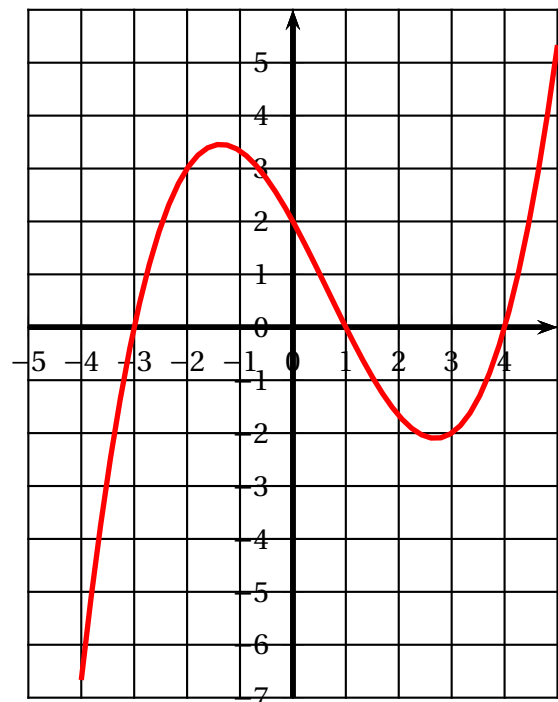
V.1 Notion intuitive de continuité

 **Définition**

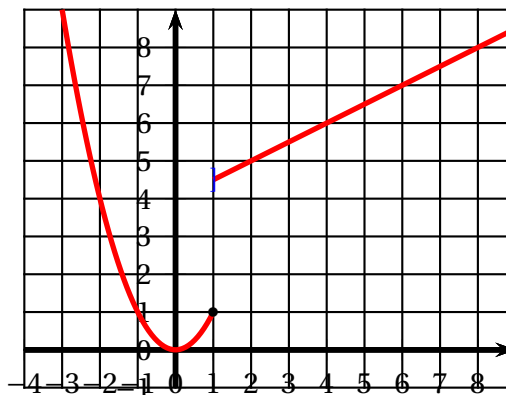
On considère une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
 On dit que f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Exemples :

La fonction f définie sur $[-4 ; 5]$ représentée ci-dessous est continue



La fonction g définie sur $[-3 ; 9]$ représentée ci-dessous n'est pas continue



V.2 Continuité des fonctions de référence



Propriété admise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $a \in I$.
 f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.



Propriété admise

- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, les fonctions affines, les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0 ; +\infty[$
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $] -\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
- La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.

VI Théorème des valeurs intermédiaires

VI.1 Cas d'un intervalle fermé



Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction f définie **et continue** sur un intervalle $[a ; b]$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : ce théorème signifie que $f(x)$ prend (au moins une fois) toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple.

Soit la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ sur $[0 ; 3]$. $f(0) = 0$ et $f(3) = 9$.

f est continue sur $[0 ; 3]$ donc toutes les valeurs entre 0 et 9 sont atteintes.

Par exemple, il existe une valeur c pour laquelle $f(c) = 2$.

Ici, on sait que $c = \sqrt{2}$.

Remarque : Ce théorème est un théorème d'existence; il ne permet en général pas de savoir la valeur de c tel que $f(c) = k$.

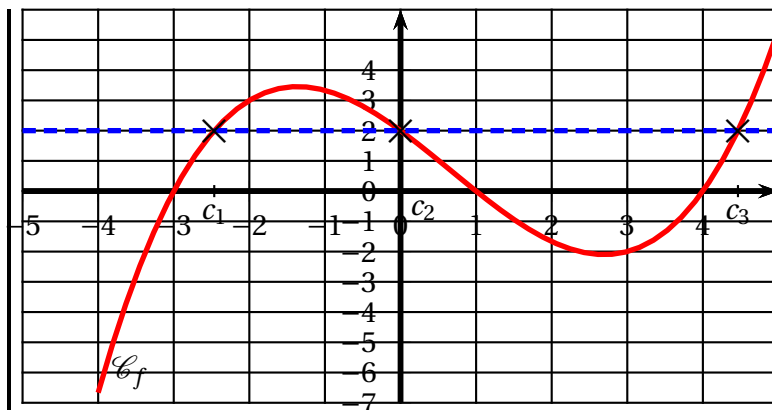
Exemple : voici la courbe représentative de la fonction continue sur $[-4 ; 5]$ définie par

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-1)(x-4)}{6}.$$

2 est compris entre $f(-4)$ et $f(5)$.

Il y a au moins une valeur c pour laquelle $f(c) = 2$.

On voit graphiquement qu'il y a même trois valeurs c_1 , c_2 et c_3 qui ont pour image 2.



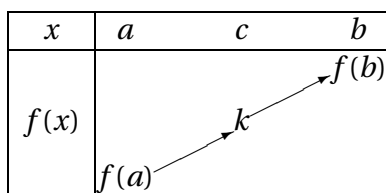
VI.2 Cas d'une fonction strictement monotone



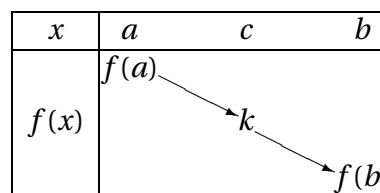
Propriété

Si f est continue et monotone sur $[a ; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution, comprise entre a et b .

Si f est croissante :



Si f est décroissante :



VI.3 Extension à d'autres intervalles



Propriété

a désigne un réel ou $-\infty$; b désigne un réel ou $+\infty$.

Soit f une fonction continue sur $]a ; b[$.

Pour tout réel k compris entre $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a ; b[$.

De plus, si f est monotone, cette solution est unique.

VI.4 Exemples

1. Soit f la fonction définie sur $[-1 ; 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1 ; 3]$.

Solution :

f est une fonction polynôme donc continue sur cet intervalle.

$$f(-1) = -2 < 0; f(3) = 2.$$

0 est donc compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1 ; 3]$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 12$ sur $[4 ; 9]$.

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[4 ; 9]$.

Solution

- On admet que f est continue (car la somme de fonctions continues est continue)
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 0$ sur $[4 ; 9]$ donc f est croissante.
- $f(4) = -6 < 0$; $f(9) = 9 > 0$ donc 0 est compris entre $f(4)$ et $f(9)$.
- D'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[4 ; 9]$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.

On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est dérivable et $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$ qui est du signe de $x^2 - x - 2$.
- Signe de $x^2 - x - 2$:
 $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.

L'expression a deux racines : $\frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1$ et $\frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$

Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

- On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	$+$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	8	-19	$+\infty$	

- Sur l'intervalle $] -\infty ; -1$, f est continue et 2 est compris entre $-\infty$ et 8. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet donc une solution sur cet intervalle. Comme f est monotone, cette solution est unique. De même, 2 est compris entre -19 et -1 donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $[-1 ; 2]$, unique car f est monotone. 2 est compris entre -19 et $+\infty$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$. Cette solution est unique car f est monotone sur cet intervalle.
- On en conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$, une dans $] -\infty ; -1$, une dans $[-1 ; 2]$ et une dans $[2 ; +\infty[$.