Limites et continuité des fonctions

Table des matières

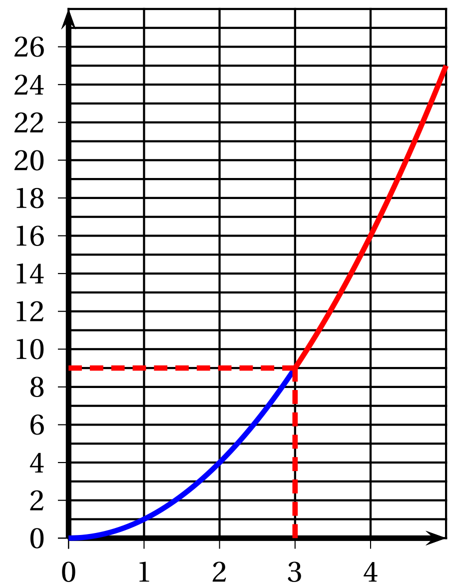
I Limite infinie en ∞

Définition

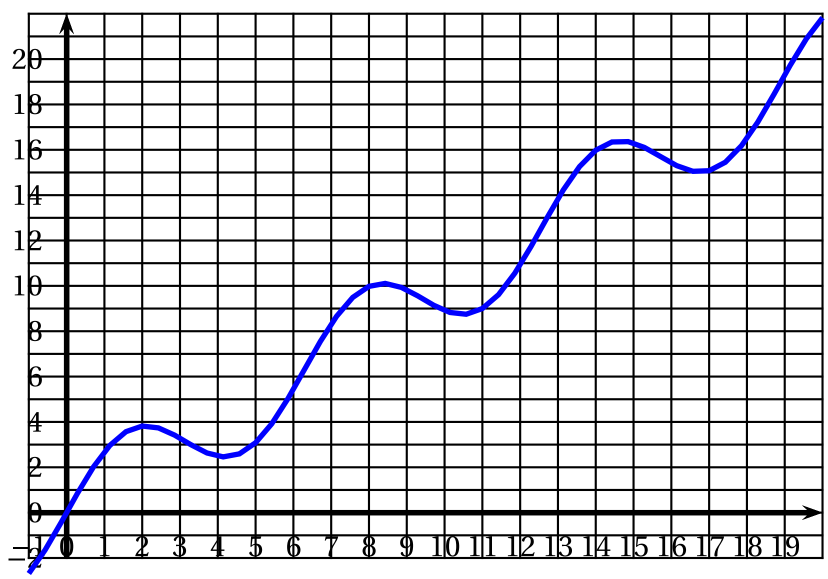
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Remarque : On a une définition analogue en $-\infty$.

Exemple : La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

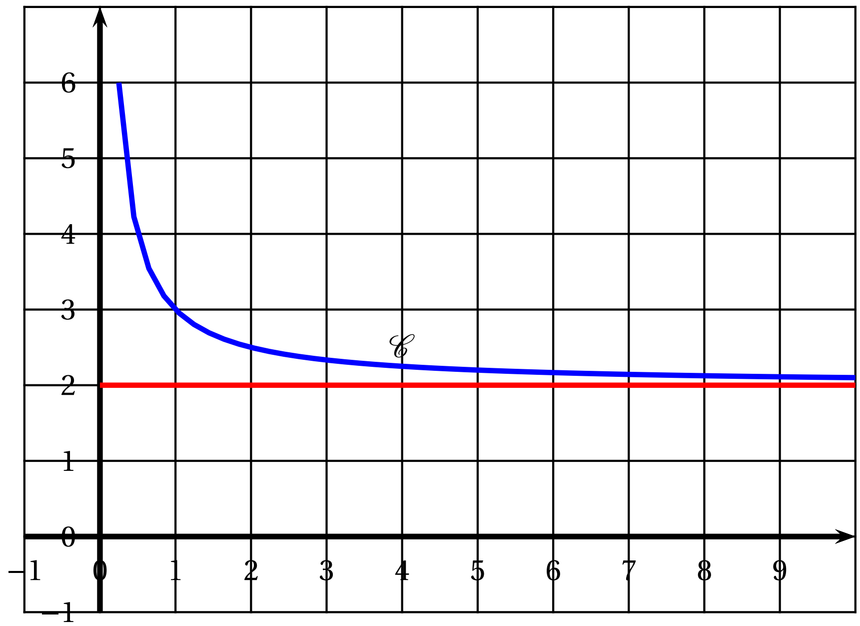


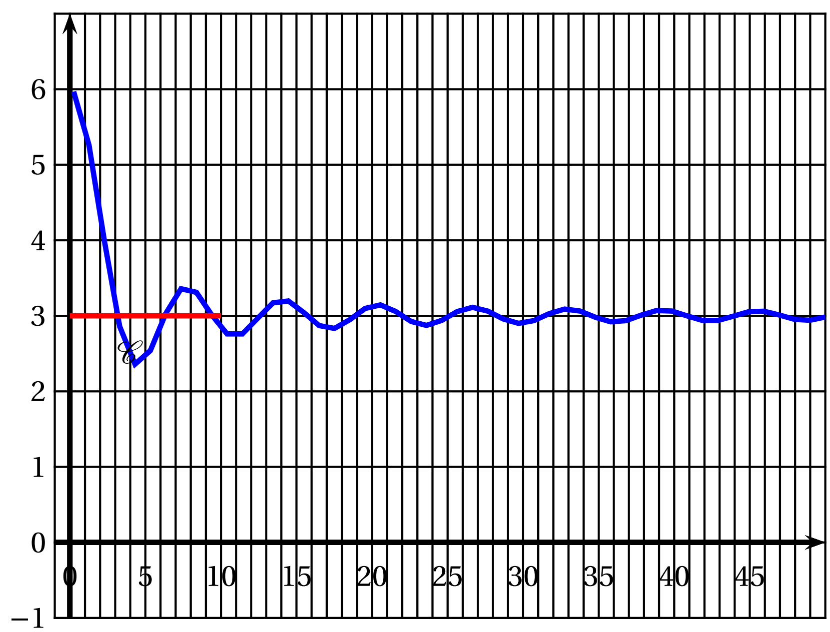
Remarque : Une fonction peut tendre vers $+\infty$ sans être croissante ! **Exemple :**



II Limite finie en ∞

Exemples graphiques :





Définition

Soit a un réel.
Dire que $f(x)$ tend vers a quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ signifie que $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de a, pour x suffisamment grand (ou petit).
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$.
On dit que la droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ ou en $-\infty$.

III Limite en un réel a

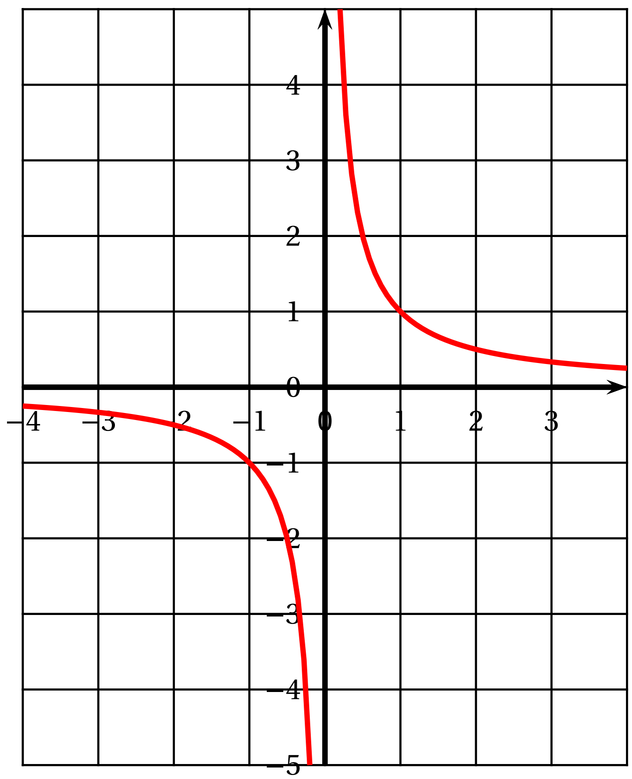
III.1 Limite infinie en a

Définition

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a signifie que $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x très proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
On dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus grandes en valeur absolue quand x est très proche de a.

Remarque : il peut y a voir une limite à droite et à gauche.

Exemple : Fonction inverse :

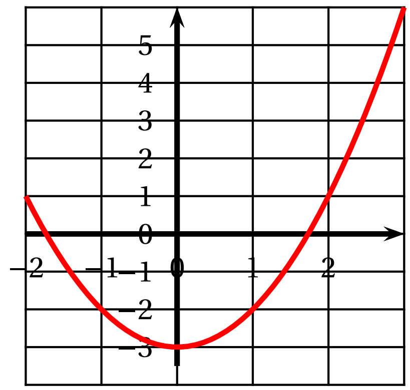


III.2 Limite finie en a

Définition

Soit une fonction définie sur un intervalle I. Soient a et ℓ deux réels.
On dit que f admet ue limite ℓ lorsque x tend vers a si les valeurs de $f(x)$ dont aussi proches de ℓ que l'on veut quand x est très proche de a.
On écrit : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

Exemple : $f(x) = x^2 - 3$.
Quand x prend des valeurs de plus en plus proches de 2, x^2 est très proche de 4, donc $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus proches de $f(2) = 1$
On a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1}$.



IV Opérations sur les limites

f et g désignent deux fonctions, ℓ et ℓ' sont deux réels. Le symbole ∞ désigne $-\infty$ ou $+\infty$.
Les propriétés ci-dessous portent sur les limites en $-\infty$, $+\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

IV.1 Somme

Si $\lim f =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Et $\lim g =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim(f+g) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**Forme indéterminée**

IV.2 Produit

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
Si $\lim g =$	ℓ'	∞	∞	∞
alors $\lim(fg) =$	$\ell\ell'$	∞	∞	**Forme indéterminée**

Pour trouver le signe de la limite d'un produit, on utilise la règle du signe d'un produit.

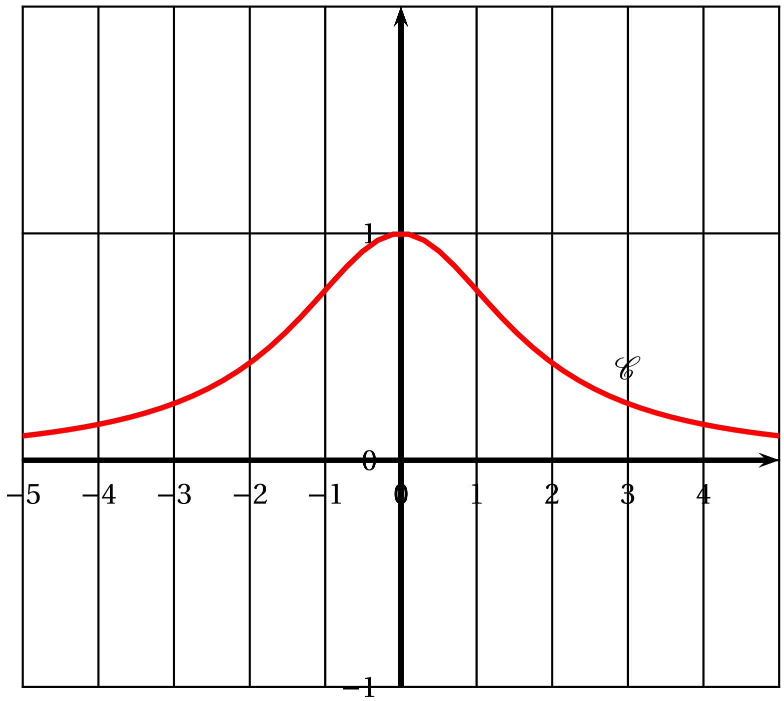
IV.3 Quotient

Si $\lim f =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	∞	∞	0
Si $\lim g =$	$\ell' \neq 0$	0	∞	ℓ	∞	0
alors $\lim\left(\dfrac{f}{g}\right) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	∞ s'il y a une limite	0	∞	**Forme indéterminée**	**Forme indéterminée**

IV.4 Exemples

1. Étudier $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ avec $h(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2+3\right) = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.
   La droite d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_h$ lorsque x tend vers $-\infty$.
   Remarque : on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ donc l'axe des abscisses est aussi asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$.

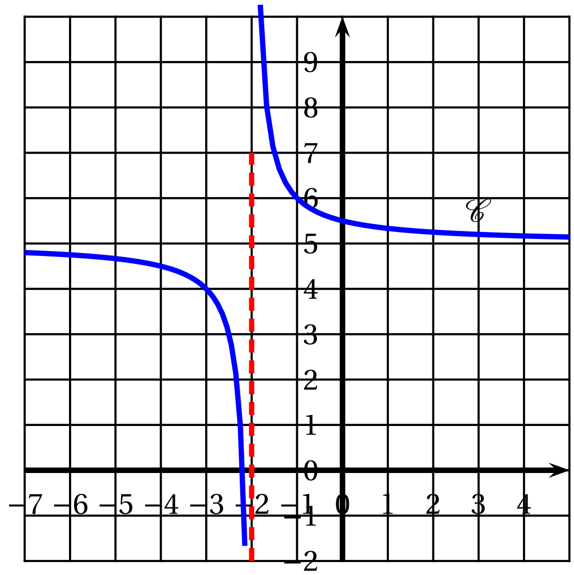
   Courbe représentative :

2. Soit la fonction $f : x \mapsto 5 + \dfrac{1}{x+2}$ définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.
   Déterminons la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers -2, par valeurs inférieures à -2.
   $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} (x+2) = 0$ avec $x+2 < 0$.
   Alors : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) = -\infty$.
   Par somme, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \left(5 + \dfrac{1}{x+2}\right) = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} f(x) = -\infty}$.
   La droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

   Remarque : $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} (x+2) = 0$ mais avec $x+2 > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} \left(\dfrac{1}{x+2}\right) = +\infty$ d'où :
   $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = +\infty}$.
   La droite d'équation $x = -2$ est encore asymptote à la courbe.

Courbe :



V Notion de continuité

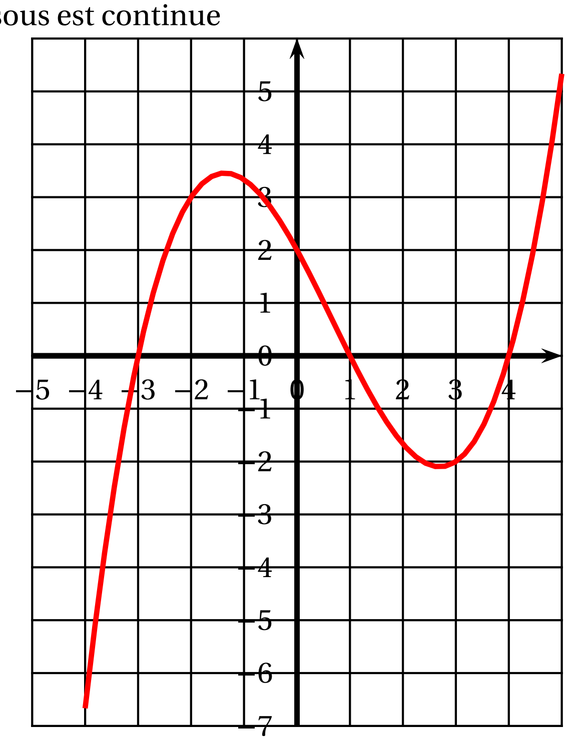
V.1 Notion intuitive de continuité

Définition

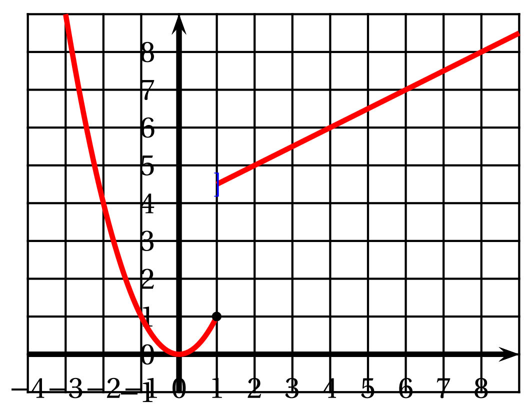
On considère une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

Exemples :

La fonction f définie sur $[-4\ ;\ 5]$ représentées ci-dessous est continue



La fonction g définie sur $[-3\ ;\ 9]$ représentées ci-dessous n'st pas continue



V.2 Continuité des fonctions de référencence

Propriété admise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
f est continue en a si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Propriété admise

- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, les fonctions affines, les fonction polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$
- La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]0\ ;\ +\infty[$.
- Le fonction exponentielle $x \mapsto \mathrm{e}^a$ est continue sur $\mathbb{R}$.

VI Théorème des valeurs intermédiaires

VI.1 Cas d'un intervalle fermé

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

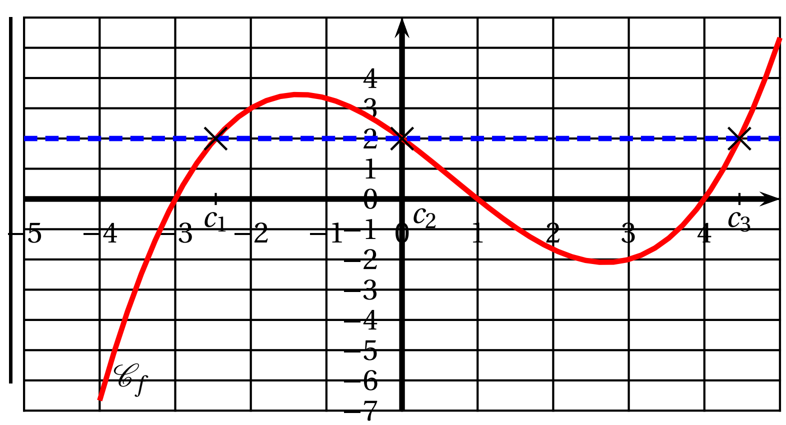
Soit f une fonction f définie **et continue** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : ce théorème signifie que $f(x)$ prend (au moins une fois) toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Exemple.
Soit la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ sur $[0\ ;\ 3]$. $f(0) = 0$ et $f(3) = 9$.
f est continue sur $[0\ ;\ 3]$ donc toutes les valeurs etre 0 et 9 sont atteintes.
Par exemple, il existe une valeur c pour la quelle $f(c) = 2$.
Ici, on sait que $c = \sqrt{2}$.

Remarque : Ce théorème est un théorème d'existence; il ne permet en général pas de savoir la valeur de c tel que $f(c) = k$.

Exemple : voici la courbe représentative de la fonction continue sur $[-4\ ;\ 5]$ définie par
$f(x) = \dfrac{(x+3)(x-1)(x-4)}{6}$.
2 est compris entre $f(-4)$ et $f(5)$.
Il y a au moins une valeur c pour laquelle $f(c) = 2$.
On voit graphiquement qu'il y a même trois valeurs c_1, c_2 et c_3 qui ont pour image 2.



VI.2 Cas d'une fonction strictement monotone

Propriété

Si f est continue et monotone sur $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution, comprise entre a et b.

Si f est croissante :

x	a	c	b
			$f(b)$
$f(x)$		k	
	$f(a)$		

Si f est décroissante :

x	a	c	b
	$f(a)$		
$f(x)$		k	
			$f(b)$

VI.3 Extension à d'autres intervalles

Propriété

a désigne un réel ou $-\infty$; b désigne un réel ou $+\infty$.
Soit f une fonction continue sur $]a\ ;\ b[$.
Pour tout relever compris entre $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a\ ;\ b[$.
De plus, si f est monotone, cette solution est unique.

VI.4 Exemples

1. Soit f la fin ton définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.

   Solution :
   f est une fonction polynôme donc continue sur cet intervalle.
   $f(-1) = -2 < 0$; $f(3) = 2$.
   0 est donc compris entre $f(-1)$ et $f(3)$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-1\ ;\ 3]$.

2. Soit $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 12$ sur $[4\ ;\ 9]$.
   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[4\ ;\ 9]$.

   Solution

   - On admet que f est continue (car la somme de fonctions continues est continue)
   - $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 0$ sur $[4\ ;\ 9]$ donc f est croissante.
   - $f(4) = -6 < 0$; $f(9) = 9 > 0$ donc 0 est compris entre $f(4)$ et $f(9)$.
   - D'après le cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[4\ ;\ 9]$.

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.
On cherche le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$.
- f est dérivable et $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\left(x^2 - x - 2\right)$ qui est du signe de $x^2 - x - 2$.
- Signe de $x^2 - x - 2$:
$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$.
L'expression a deux racines : $\dfrac{1-\sqrt{9}}{2} = -1$ et $\dfrac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$
Ce trinôme du second degré est du signe du coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
- On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			8				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-19	↗	

- Sur l'intervalle]− ; −1, f est continue et 2 est compris entre $-\infty$ et 8.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet donc une solution sur cet intervalle.
Comme f est monotone, cette solution est unique.
De même, 2 est compris entre -19 et -1 donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur $[-1 ; 2]$, unique car f est monotone.
2 est compris entre -19 et $+\infty$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$.
Cette solution est unique car f est monotone sur cet intervalle.
- On en conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans $\mathbb{R}$, une dans $]-\infty ; -1$, une dans $[-1 ; 2]$ et une dans $[2 ; +\infty[$.