Correction des exercices sur les limites de fonctions

Exercice I : Limites à l'infini

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

   Par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x+\dfrac{1}{x}\right) = +\infty}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-6) = -\infty$.

   Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(x-6) = -\infty}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$

   Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2+1\right)(2-x) = -\infty}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$.

   Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}(1-x) = -\infty}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\mathrm{e}^x\right) = +\infty$, d'où :

   $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\mathrm{e}^x-1\right) = +\infty}$

6. $\lim\limits_{x\to-\infty} ((x-5)) = -\infty$ donc :

   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x-5}\right) = 0}$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2+1)\right) = +\infty$.

   Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = 0$ d'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^2+1}+7\right) = 7}$

8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$ d'où :

   $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{2}{x}-3\right) = -3}$

Exercice II : Limites en un réel

Étudier les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0} x = 0$; $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} \left(\sqrt{x}-3\right) = -3$.

   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{0}{-3} = 0}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} (x-5) = 0$ avec $x-5>0$.

   Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}} \dfrac{1}{x-5} = +\infty}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} (x+1)) = 4$

$\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} (x-3) = 0$ avec $x-3>0$.

Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right) = +\infty}$

Exercice III : Formes indéterminées

Calculer :

1. $3x^2-4x+7 = x^2\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)$.

- $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right) = 3$.

  Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^2-4x+7\right) = +\infty}$

- De même :

  $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(3-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right) = 3$.

  Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty} \left(3x^2-4x+7\right) = -\infty}$

2. $2x^4-7x+8 = x^4\left(2-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^4}\right)$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2-\dfrac{7}{x^3}+\dfrac{8}{x^4}\right)$.
- Par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x^4-7x+8\right) = +\infty}$

3. $\dfrac{3x+5}{7x-2} = \dfrac{\cancel{x}\left(3+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(7-\frac{2}{x}\right)} = \dfrac{3+\frac{5}{x}}{7-\frac{2}{x}}$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}\right) = 3$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(7-\dfrac{3}{x}\right) = 7$
- Par qutient : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{3x+5}{7x-2}\right) = \dfrac{3}{7}}$

4. - $\dfrac{x^2+2}{1-x} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-1\right)} = \boxed{x \times \dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}}$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$ (évident)
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right) = -1$
- Par produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{1-x}\right) = +\infty}$