Mathématiques spécifiques : dérivation globale : feuille d'exercices n° 2

Exercice I

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$h(x) = -5x^3 - x.$$

1) Déterminer h' la fonction dérivée de h.
2) Étudier le signe de $h'(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
3) En déduire les variations de la fonction h sur $[0\,;\,1]$.

Exercice II

Un professeur a demandé à ses élèves d'étudier les variations de la fonction g définie sur $[0;\,9]$ par $g(x) = 3x–12$.
Voilà la réponse d'un élève :
$g(x) > 0 \iff 3x - 12 > 0 \iff 3x > 12 \iff x > 4$.

x	0	4	9
Signe de $g(x)$	$-$	0	$+$
Variation de $g(x)$	↘		↗

Cet élève a-t-il fait une erreur ? Qu'en penses-tu ?

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7.$$

1) Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$f'(x) = (3x - 9)(x + 1).$$
2) Étudier le signe de $f'(x)$.
3) En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

On injecte un médicament à un malade.
La quantité de substance, exprimée en cm^3, présente dans le sang du malade à l'instant t, exprimé en heures, est donnée par la fonction f définie sur $[0;\,12]$ par :

$$f(t) - 0,02t^3 - 0,48t^2 + 2,88t.$$

1) Déterminer $f'(t)$ et vérifier que :
$$f'(t) = (0,06t - 0,24)(t - 12).$$
2) Étudier le signe de $f'(t)$ et en déduire les variations de f sur $[0;\,12]$.
3) Au bout de combien d'heures la substance présente dans le sang commence-t-elle à diminuer ?

Exercice V

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1.$$

1) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
3) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ?

Exercice VI

Un artisan produit des vases en terre cuite. Sa capacité de production est limitée à 60 vases.
Le coût de production, en euros, dépend du nombre de vases produits et peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,60]$ par

$$C(x) = x^2 - 10x + 500.$$

Un vase est vendu 50 €.
Les recettes, qui dépendent du nombre de vases produits et vendus, sont modélisées par une fonction R définie sur $[0\,;\,60]$.

1) Calculer le coût et la recette réalisés lorsque l'artisan produit et vend 50 vases.
2) Exprimer $R(x)$ en fonction de x.
3) Le résultat, en euros, réalisé par l'artisan est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;\,60]$ par B(x) = R(x)-C(x).
   a) Vérifier que $B(x) = -(x - 10)(x - 50)$.
   b) Déterminer le nombre de vases à produire et à vendre pour que l'artisan réalise des bénéfices (c'est-à-dire pour que le résultat $B(x)$ soit positif).
4) On note B' la fonction dérivée de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;\,60]$.
   a) Déterminer $B'(x)$.
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0;\,60]$ et en déduire le nombre de vases à produire et vendre pour réaliser un bénéfice maximum.