Dérivation globale, étude des variations d'une fonction

I Fonction dérivée

Définition : fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et admettant un nombre dérivé en tout x de I.
On dit que la fonction f est dérivable sur I et on appelle fonction dérivée de f sur I la fonction qui, à tout réel x de I, associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x.
On la note f'.

Exemple : on a vu que pour $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$..

Remarque f' est donc la fonction qui donne, pour chaque réel x de I, le coefficient directeur $f'(x)$ de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x.

Propriété (Dérivées des fonctions usuelles)

- Soit k un nombre réel. Les fonctions constantes définies par $f(x) = k$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et leur fonction dérivée est la fonction nulle $f'(x) = 0$.
- La fonction identité définie par f(x) = ax+b est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $f'(x) = a$.
- La fonction carré définie par $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $f'(x) = 2x$.
- La fonction cube définie par $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $f'(x) = 3x^2$.
- Plus généralement, la fonction définie par $f(x) = x^n$ (n entier supérieur ou égal à 2) a pour fonction dérivée $f'(x) = nx^{n-1}$.

Propriété : dérivée de la somme de deux fonctions

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
La fonction f définie par $f(x) = u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Exemples :

1) Soit $f(x) = x^2 + 3x + 5$; $f = u + v$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = 3x + 5 \text{ (fonction affine)} \end{cases}$.

   $f' = u' + v'$ avec $u\begin{cases} '(x) = 2x \\ v'(x) = 3 \end{cases}$.

   Alors : $\boxed{f'(x) = 2x + 3}$

2) $f(x) = x^3 + x^5$.
   $f'(x) = 3x^2 + 5x^4$ car la dérivée de $f : x \mapsto x^n$ est $f'(x) = nx^{n-1}$ avec $n = 3$ puis $n = 5$.

Propriété : dérivée du produit d'une fonction par un réel

Soit k un nombre réel et u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f définie par $f(x) = k \times u(x)$ est dérivable sur I, et $f'(x) = k \times u'(x)$.

Exemple : $f(x) = 7x^2$.
$f = ku$ avec $k = 7$ et $u(x) = x^2$.
$f' = ku'$ avec $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = 7 \times 2x$; $\boxed{f'(x) = 14x}$

II Variations d'une fonction

Théorème

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est croissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- La fonction f est constante sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Exemples Pour chacune des fonctions suivantes, étudions leurs variations.

1) $f(x) = x^2$; $f'(x) = 2x$.

- $f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$
- $f'(x) > 0 \iff 2x > 0 \iff x > 0$
- $f'(x) < 0 \iff 2x < 0 \iff x < 0$
- Tableau de signes de $f\,f'$ et tableau da variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2) $f(x) = 3x^2 + 5x - 7$.

- $f'(x) = 3 \times 2x + 5 = 6x + 5$
- $f'(x) = 0 \iff 6x + 5 = 0 \iff x = -\dfrac{5}{6}$
- $f'(x) > 0 \iff 2x + 5 > 0 \iff 2x > -5 \iff x > -\dfrac{5}{6}$
- $f'(x) < 0 \iff 2x + 5 < 0 \iff 2x < -5 \iff x < -\dfrac{5}{6}$
- **Tableau de variation**

x	$-\infty$		$-\dfrac{5}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\dfrac{109}{12}$	$\nearrow$	

3) $f(x) = x^3 + 4x$

- $f'(x) = 3x^2 + 4$
- Pour tout x, $x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2 \geqslant 0$ donc $3x^2 + 4 \geqslant 4 > 0$ d'où $\boxed{f'(x) > 0}$.
- On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.