Maths spécifiques : feuille d'exercices sur la dérivation n° 4

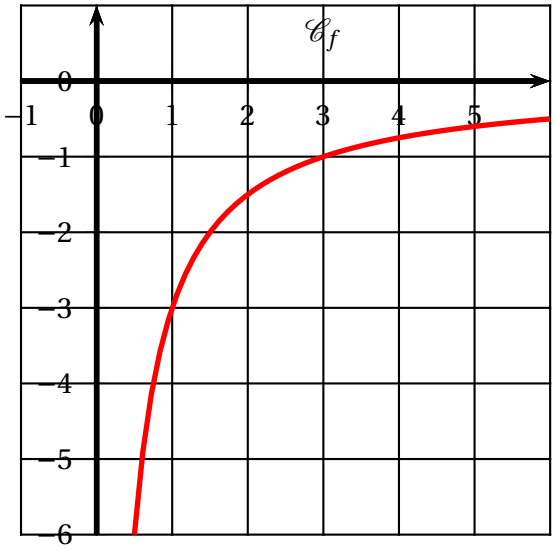
Exercice I Équation de la tangente

On considère la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{3}{x}.$$

Soit le point A d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1) Donner l'ordonnée du point A.
2) On admet que : $f'(1) = 3$.
   Déterminer par le calcul l'équation réduite de la tangente à la courbe passant par le point A.
3) Placer A et tracer cette tangente sur le graphique ci-dessous.



Exercice II Équation d'une tangente : cas général

Soit f une fonction. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse a.

1) Quelle est l'ordonnée de A ?
2) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ?
3) En déduire que l'équation réduite de la tangente en A à $\mathscr{C}_f$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Exercice III Nombre dérivé pour la fonction inverse

Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

1) Pour tout réel h, calculer le taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ en fonction de h.
2) Vers quelle valeur se rapproche ce taux quand h se rapproche de 0 ?
3) Que peut-on en déduire pour le nombre dérivé f'(1) ?
4) Soit a un réel quelconque non nul.
   Pour tout réel h, calculer le taux d'accroissement entre a et $a+h$ en fonction de h.
5) Vers quelle valeur se rapproche ce taux quand h se rapproche de 0 ?
6) Que peut-on en déduire pour le nombre dérivé $f'(a)$?

Exercice IV Coût marginal en économie

Une entreprise fabrique une quantité q d'objets dont le coût en milliers d'euros est donné par la fonction C définie pour $q \in [0\,;\,7]$ par :

$$C(q) = 0,15q^3 - 0,8q^2 + 1,2q + 0,9.$$

1) Calculer le coût de fabrication pour un nombre d'objets q de 1 à 6.
2) En déduire le coût moyen C_M de fabrication d'un seul objet, pour chacun des cas précédents.
3) Pour quel nombre d'objets fabriqués ce coût moyen semble-t-il minimal ?
4) On rappelle que le coût marginal C_m est défini en économie par le taux d'accroissement

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

correspondant au coût de fabrication d'un objet supplémentaire.
Calculer ce coût marginal pour q variant de 1 à 6.
5) Pour quelle valeur q_0 ce coût marginal semble-t-il minimum ?
Remarque Pour q_0 le coût marginal est égal au coût moyen.