Maths spécifiques : correction de la feuille d'exercices sur la dérivation n° 4

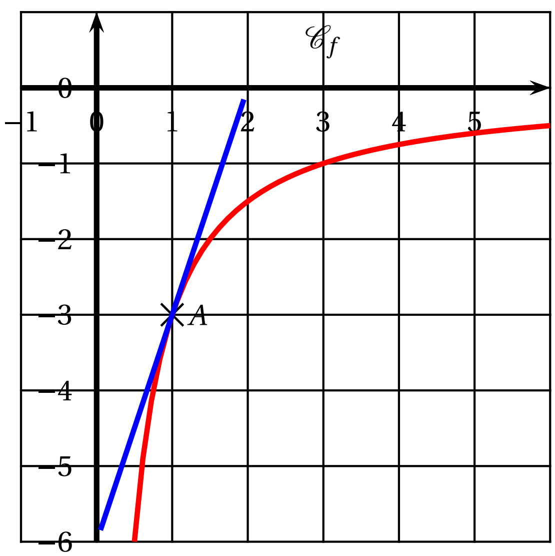
Exercice I Équation de la tangente

On considère la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{3}{x}.$$

Soit le point A d'abscisse 1 de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1) L'ordonnée du point A est $f(1) = -3$.
2) On admet que : $f'(1) = 3$.
   L'équation de la tangente en 1 est de la forme $y = f'(1)x + p \iff y = 3x + p$ puisque $f'(1)$ est le coefficient directeur de cette tangente.
   Cette droite passe par $A(1\,;\,-3)$ donc $-3 = 3\times 1 + p$d'où $\boxed{p = -6}$.
   L'équation de la tangente en 1 est $\boxed{y = 3x - 6}$
3) Placer A et tracer cette tangente sur le graphique ci-dessous.



Exercice II Équation d'une tangente : cas général

Soit f une fonction. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisse a.

1) L'ordonnée de A est $f(a)$.
2) Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A est $f'(a)$.
3) L'équation de la tangente en a est : $y = f'(a)x + p$.
   Elle passe par $A(a\,;\,f(a))$ donc $f(a) = f'(a)\times a + p$ d'où $p = f(a) - f'(a)\times a$.
   L'équation devient :
   $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)\times a$
   $\iff \boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Exercice III Nombre dérivé pour la fonction inverse

Soit la fonction f définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

1) Le taux d'accroissement entre 1 et $1+h$ en fonction de h est :
   $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \dfrac{\frac{1}{1+h}-1}{h} = \dfrac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} = \dfrac{\frac{-h}{1+h}}{h} = -\dfrac{h}{h(1+h)} = -\dfrac{1}{1+h}$.
2) Ce taux se rapproche de -1 lorsque h se rapproche de 0.
3) On en déduit que $\boxed{f'(1) = -1}$.
4) Soit a un réel quelconque non nul.
   L taux d'accroissement entre a et $a+h$ en fonction de h est :
   $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \dfrac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h} = \boxed{-\dfrac{1}{a(a+h)}}$.
5) Ce taux quand h se rapproche de 0 se rapproche de $\boxed{-\dfrac{1}{a^2}}$.
6) On en déduit que $\boxed{f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}}$.

Exercice IV Coût marginal en économie

Une entreprise fabrique une quantité q d'objets dont le coût en milliers d'euros est donné par la fonction C définie pour $q \in [0\,;\,7]$ par :

$$C(q) = 0,15q^3 - 0,8q^2 + 1,2q + 0,9.$$

On obtient :

q	1	2	3	4	5	6
$C(q)$	1,45	1,3	1,35	2,5	5,65	11,7
$C_M(q)$	1,45	0,65	0,45	0,63	1,13	1,35
$C_m(q)$	-0,15	-0,05	1,15	3,15	6,05	

3) Pour 3 objets.
5) Pour $q_0 = 2$.