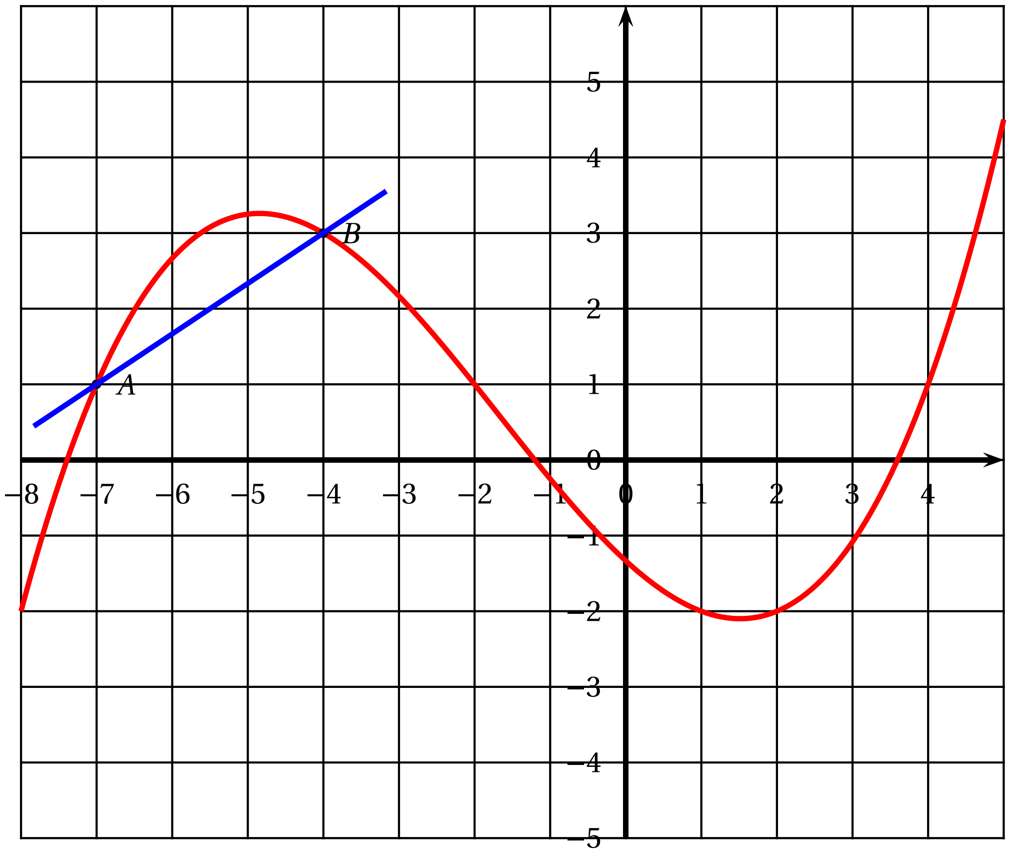
Tangente à une courbe, nombre dérivé d'une fonction

Exercice I Tangente à une courbe

f est une fonction définie sur un intervalle I, a et b sont deux réels de I, et A et B les points de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f d'abscisses respectives a et b.

Définition

On appelle sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ toute droite passant par deux points A et B distincts de la courbe.

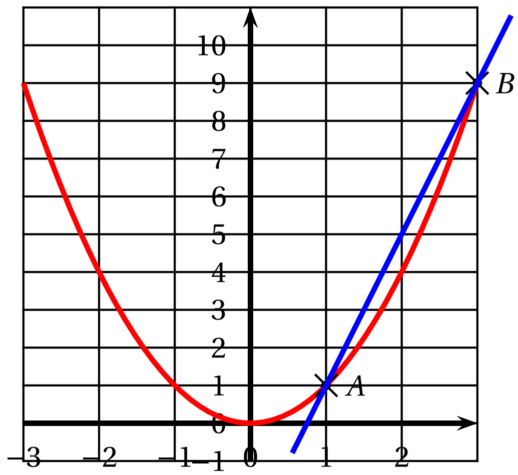


Propriété : Taux d'accroissement et sécante

Le coefficient directeur de la sécante (AB) est le taux d'accroissement de f entre a et b.

Il est défini par le quotient : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

. **Exemple** : soit $f : x \mapsto x^2$ Le taux d'accroissement entre 1 et 3 vaut : $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{9-1}{2} = \boxed{4}$.
Le coefficient directeur de la sécante (AB) est 4.



.

Définition : Tangente

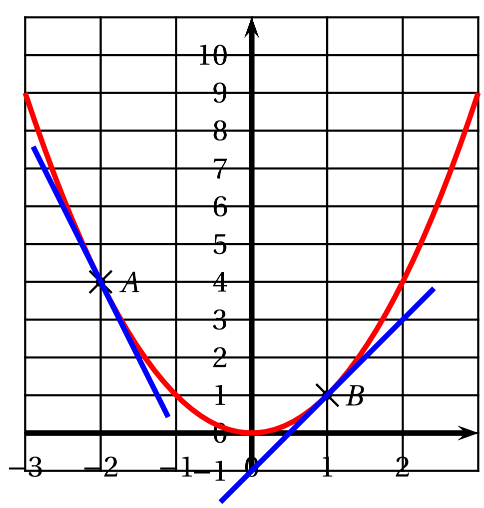
Quand B se rapproche de A, si la sécante (AB) semble se rapprocher d'une position limite ; cette « droite limite » s'appelle la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A (ou en A).

Propriété d'unicité

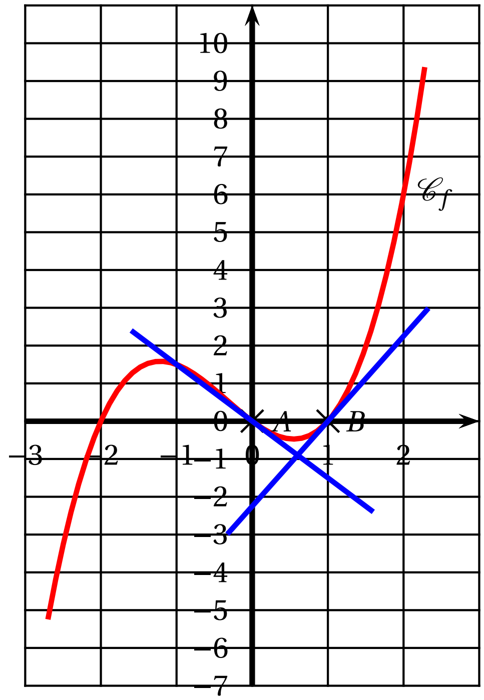
Quand elle existe, cette tangente est unique et vient « frôler » la courbe $\mathscr{C}$ autour du point A.
Localement, la croupe et la tangente se confondent presque.

Exemples :

1) $f : x \mapsto x^2$.
Traçons les tangentes en -2 et 1.



2) Soit $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x(x-1)(x+2)$.
Voilà les tangentes en 0 et en 1 :



Définition du nombre dérivé

Si la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente non verticale au point d'abscisse a, alors le coefficient directeur de cette tangente est appelé nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$ (qu'on lit « f prime de a »).

Modélisation

Si $x(t)$ correspond à la position d'un mobile, $\dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}$ correspond à la vitesse moyenne entre a et t. Le nombre dérivé $x'(a)$ est la vitesse **instantanée** en a.