Mathématiques spécifiques : dérivation globale : correction de la feuille d'exercices n° 2

Exercice I

Soit h la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :
$h(x) = -5x^3 - x$.

1) $h'(x) = -5 \times 3x^2 - 1 = -15x^2 - 1$

2) $h'(x) = -\left[15x^2 + 1\right] < 0$

3) On en déduit que h est décroissante sur $[0\,;\,1]$.

Exercice II

Un professeur a demandé à ses élèves d'étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,9]$ par $g(x) = 3x - 12$.
Voilà la réponse d'un élève :
$g(x) > 0 \iff 3x - 12 > 0 \iff 3x > 12 \iff x > 4$.

x	0		4		9
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de $g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Cet élève a confondu le signe de g' et celui de g.

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
$(3x-9)(x+1) = 3x^2 + 3x - 9x - 9 = 3x^2 - 6x - 9$.
Donc $\boxed{f'(x) = (3x-9)(x+1) = 3(x-3)(x-1)}$.

2) $f'(x)$ s'annule pour $x = 1$ ou $x = 3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$3x-9$		$+$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$+$	0	$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-4	$\searrow$	-20	$\nearrow$	

3) Variations dans le tableau précédent.

Exercice IV

On injecte un médicament à un malade.
La quantité de substance, exprimée en cm^3, présente dans le sang du malade à l'instant t, exprimé en heures, est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;12]$ par : $f(t) - 0,02t^3 - 0,48t^2 + 2,88t$.

1) $f'(t) = 0,06t^2 - 0,96t + 2,88$
   Or $(0,06t - 0,24)(t-12) = 0,06t^2 - 0,72t - 0,24t + 2,88 = 0,06t^2 - 0,96t + 2,88 = f'(t)$

2)

t	0		4		12
$0,06t-0,24$		$-$	0	$+$	
$t-12$		$-$		$-$	0
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

3) La quantité de substance présente dans le sang commence à diminuer au bout de 4 heures.

Exercice V

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$.

1) $\boxed{f'(x) = 12x^2 - 4x = 4x(3x-1)}$

2) $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{3}$

3) On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ a deux tangentes « horizontales », c'est-à-dire de coefficient directeur 0 : une au point d'abscisse 0 et une au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

Exercice VI

Un artisan produit des vases en terre cuite. Sa capacité de production est limitée à 60 vases.
Le coût de production, en euros, dépend du nombre de vases produits et peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Un vase est vendu 50 €.
Les recettes, qui dépendent du nombre de vases produits et vendus, sont modélisées par une fonction R définie sur $[0\,;60]$.

1) $C(50) = 2\,500$, donc le coût de production de 50 vases est 2 500 €.
   La recette est de 50 €par vase, donc elle est égale à 2 500 €.

2) $\boxed{R(x) = 50x}$

3) Le résultat, en euros, réalisé par l'artisan est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0\,;60]$ par B(x) = R(x)-C(x).

   a) $B(x) = 50x$.
      $B(x) = 50x - \left(x^2 - 10x + 500\right)$.
      Donc $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.
      Or $-(x-10)(x-50) = -\left(x^2 - 10x - 50x + 500\right) = -x^2 + 60x - 500 = B(x)$.

   b) Tableau de signes :

x	0		10		50		60
$x+10$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-50$		$-$		$-$	0	$+$	
$B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Le bénéfice est positif lorsque l'artisan produit et vend entre 10 et 50 vases.

4) On note B' la fonction dérivée de la fonction B sur l'intervalle $[0\,;60]$.

   a) $\boxed{B'(x) = -2x + 60}$.

   b) $B'(x) = 0 \iff x = 30$

x	0		30		60
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

   L'artisan doit produire 30 vases afin de réaliser un bénéfice maximum.