

Mathématiques spécifiques : dérivation globale : correction de la feuille d'exercices n° 2

Exercice I

Soit h la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$h(x) = -5x^3 - x.$$

1) $h'(x) = -5 \times 3x^2 - 1 = -15x^2 - 1$

2) $h'(x) = -[15x^2 + 1] < 0$

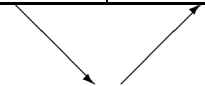
3) On en déduit que h est décroissante sur $[0; 1]$.

Exercice II

Un professeur a demandé à ses élèves d'étudier les variations de la fonction g définie sur $[0; 9]$ par $g(x) = 3x - 12$.

Voilà la réponse d'un élève :

$$g(x) > 0 \iff 3x - 12 > 0 \iff 3x > 12 \iff x > 4.$$

x	0	4	9
Signe de $g(x)$	-	0	+
Variation de $g(x)$			

Cet élève a confondu le signe de g' et celui de g .

Exercice III

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

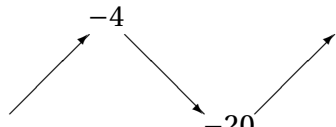
$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7.$$

1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

$$(3x - 9)(x + 1) = 3x^2 + 3x - 9x - 9 = 3x^2 - 6x - 9.$$

Donc $f'(x) = (3x - 9)(x + 1) = 3(x - 3)(x + 1).$

2) $f'(x)$ s'annule pour $x = 1$ ou $x = 3$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$3x-9$	+	-	0	+	
$x-1$	+	0	-	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					

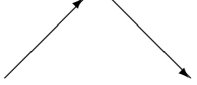
3) Variations dans le tableau précédent.

Exercice IV

On injecte un médicament à un malade.
La quantité de substance, exprimée en cm^3 , présente dans le sang du malade à l'instant t , exprimé en heures, est donnée par la fonction f définie sur $[0; 12]$ par : $f(t) = 0,02t^3 - 0,48t^2 + 2,88t$.

- 1) $f'(t) = 0,06t^2 - 0,96t + 2,88$
Or $(0,06t - 0,24)(t - 12) = 0,06t^2 - 0,72t - 0,24t + 2,88 = 0,06t^2 - 0,96t + 2,88 = f'(t)$

2)

t	0	4	12
$0,06t - 0,24$	-	$\emptyset$	+
$t - 12$	-	-	$\emptyset$
$f'(t)$	+	$\emptyset$	-
$f(t)$			

- 3) La quantité de substance présente dans le sang commence à diminuer au bout de 4 heures.

Exercice V

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$.

- 1) $f'(x) = 12x^2 - 4x = 4x(3x - 1)$
- 2) $f'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$
- 3) On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a deux tangentes « horizontales », c'est-à-dire de coefficient directeur 0 : une au point d'abscisse 0 et une au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

Exercice VI

Un artisan produit des vases en terre cuite. Sa capacité de production est limitée à 60 vases.

Le coût de production, en euros, dépend du nombre de vases produits et peut être modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Un vase est vendu 50 €.

Les recettes, qui dépendent du nombre de vases produits et vendus, sont modélisées par une fonction R définie sur $[0; 60]$.

- 1) $C(50) = 2500$, donc le coût de production de 50 vases est 2 500 €.

La recette est de 50 € par vase, donc elle est égale à 2 500 €.

2) $R(x) = 50x$

- 3) Le résultat, en euros, réalisé par l'artisan est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.

a) $B(x) = 50x$.

$$B(x) = 50x - (x^2 - 10x + 500).$$

$$\text{Donc } B(x) = -x^2 + 60x - 500.$$

$$\text{Or } -(x - 10)(x - 50) = -(x^2 - 10x - 50x + 500) = -x^2 + 60x - 500 = B(x).$$

- b) Tableau de signes :

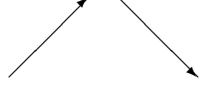
x	0	10	50	60
$x + 10$	+	$\emptyset$	-	-
$x - 50$	-	-	$\emptyset$	+
$B(x)$	-	$\emptyset$	+	$\emptyset$

Le bénéfice est positif lorsque l'artisan produit et vend entre 10 et 50 vases.

- 4) On note B' la fonction dérivée de la fonction B sur l'intervalle $[0; 60]$.

a) $B'(x) = -2x + 60$.

b) $B'(x) = 0 \iff x = 30$

x	0	30	60
$B'(x)$	+	$\emptyset$	-
$B(x)$			

L'artisan doit produire 30 vases afin de réaliser un bénéfice maximum.