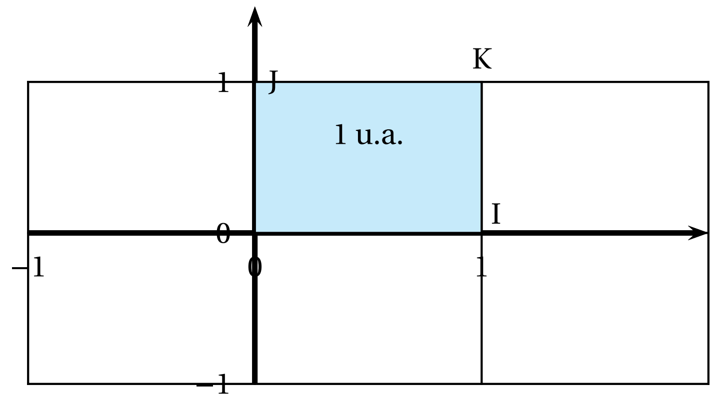
Intégration

I Intégrale d'une fonction continue positive

I.1 Aire sous la courbe

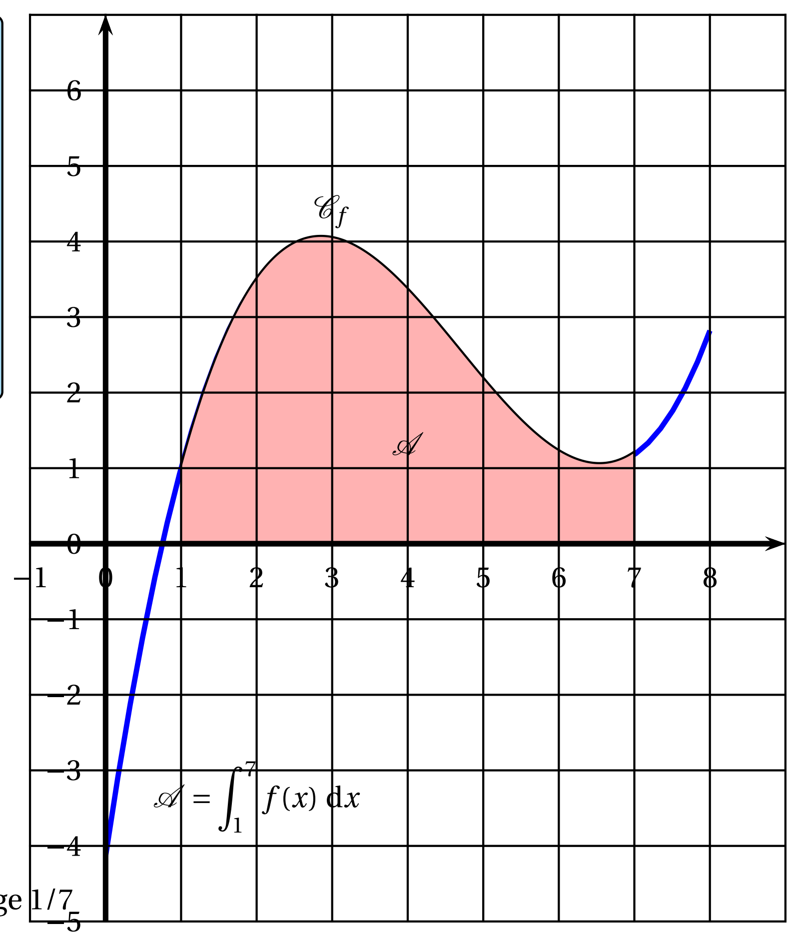
Définition

Soit un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$ orthogonal et soit $K(1\,;\,1)$.
' L'aire du rectangle $OIKJ$ est appelée unité d'aire et notée u.a..



Définition

Soit f une fonction continue, positive sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'aire, exprimée en u.a. du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations $t = a$ et $t = b$.
Cette intégrale es notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

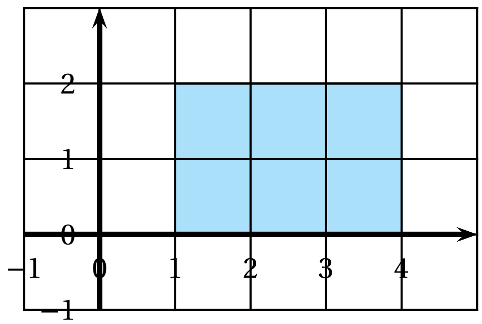


Remarques :

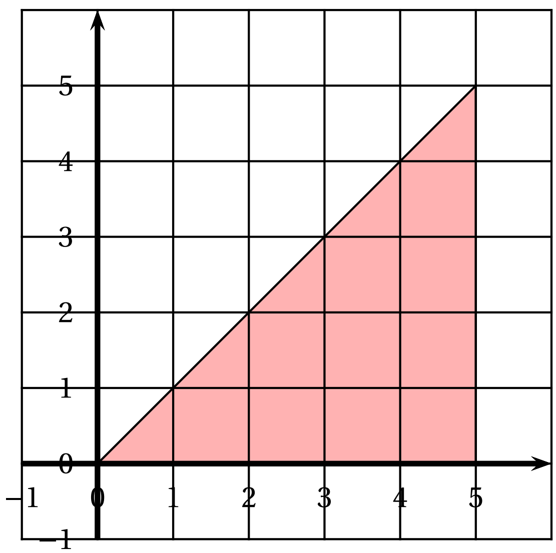
- Dans la notation $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la variable x est dite « muette » ; on peut la remplacer par une autre lettre :
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Le « dx » est là pour représenter une largeur infinitésimale ; en effet, l'intégrale peut-être vue comme une somme d'aires de rectangles de hauteur $f(x)$ et de largeur infinitésimale dx.

Exemples :

1. $\int_1^4 2\,\mathrm{d}x = 6$ (aire d'un rectangle de hauteur 2, construit sur l'intervalle $[1\,;\,4]$).



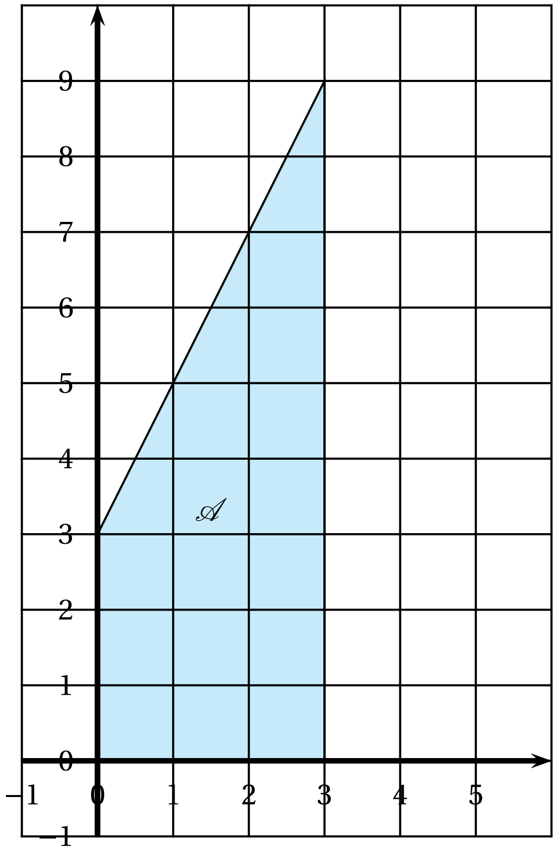
2. Calculer $\int_0^5 x\,\mathrm{d}x$.



$\int_0^5 x\,\mathrm{d}x$ est l'aire d'un triangle, de base 5 et de hauteur 5.

On en déduit : $\int_0^5 x\,\mathrm{d}x = \dfrac{5\times 5}{2} = \dfrac{25}{2}$ u.a.

Calculer $\displaystyle\int_0^3 (2x+3)\,\mathrm{d}x$



$\displaystyle\int_0^3 (2x+3)\,\mathrm{d}x$ est l'aire $\mathscr{A}$ d'un trapèze, de petite base 3, de grande base 9 et de hauteur 3.

On en déduit :

$$\int_0^5 (2x+3)\,\mathrm{d}x = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base}) \times \text{hauteur}}{2}$$

$$= \frac{(3+9)\times 3}{2} = 18 \text{ u.a.}$$

I.2 Relation de Chasles

Relation de Chasles

Soient trois nombres a, b et c avec $c \in [a\,;\,b]$ et soit f continue positive sur $[a\,;\,b]$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

C'est « évident » géométriquement.

II Intégrale d'une fonction continue

II.1 Théorème fondamental

Théorème (admis)

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Le fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et $F'(x) = f(x)$.

Remarque : ce théorème justifie l'existence de primitives.

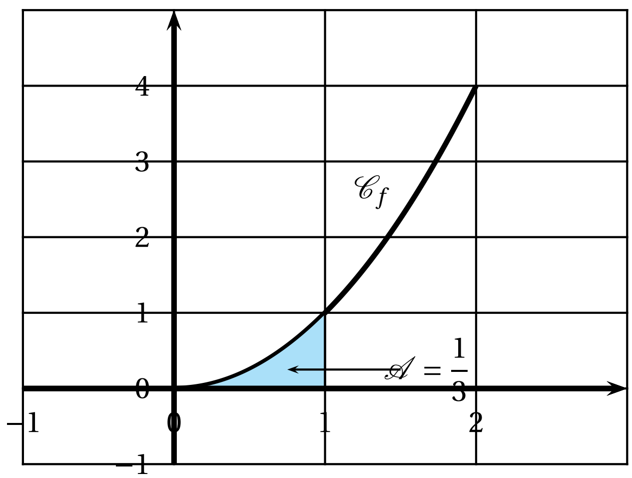
Théorème

Soit f une fonciion continue positive sur $[a\,;\,b]$.
$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f.

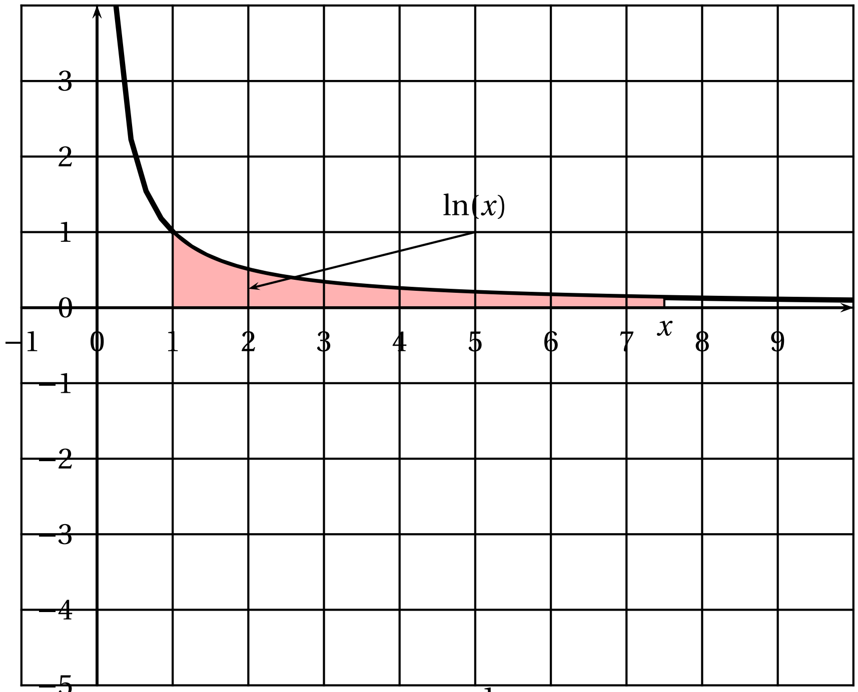
Démonstration :

On définit la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
G est une primitive de f.
Il existe donc k tel que $G = F + k$.
De plus, $G(a) = 0$ donc $k = -F(a)$.
Alors : $G(x) = F(x) - F(a)$ donc $G(x) = F(x) - F(a)$ d'où $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Remarque : cela permet de calculer des aires à l'aide d'une primitive de fonction.
Exemple : soit $f(x) = x^2$.
$F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$



Exemple : Calculer l'intégrale $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.



Une primitive de $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est $\ln : t \mapsto \ln(t)$.

Donc $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) - \ln(1) = \boxed{\ln(x)}$

II.2 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a\,;\,b]$.

On admet que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f.

Remarque :

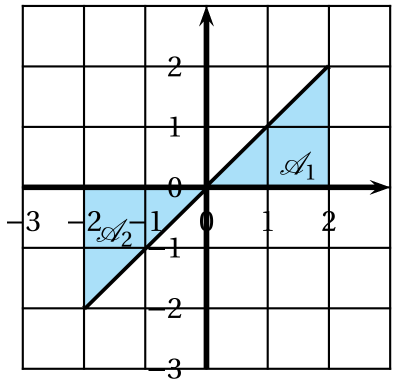
- Si f est négative sur $[a\,;\,b]$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'opposé de l'aire entre $\mathscr{C}_f$ et 'axe des abscisses (car une aire est positive).
- Si f change de signe, f, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à la somme des aires algébriques, comptées positivement si la fonction est positive et négativement sinon.

Exemple :

$f(x) = x$ sur $[-2\,;\,2]$

Une primitive de f est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = 2 - 2 = 0$



$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 = 0$ car $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$

III Applications du calcul intégral

III.1 Valeur moyenne d'une fonction

Définition

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;\,b]$.

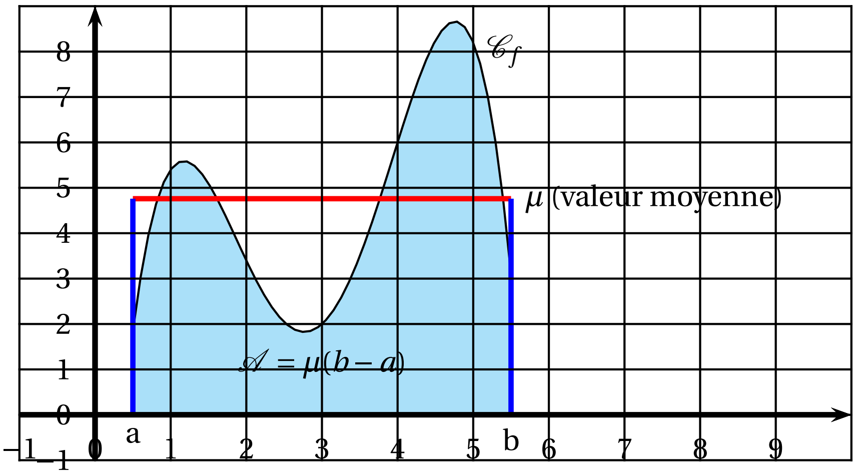
N appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;\,b]$ le réel $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple : sit f la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.

Sa valeur moyenne sur $[0\,;\,10]$ est $\dfrac{1}{10-0}\displaystyle\int_0^{10} x^3\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{10}\left[\dfrac{10^4}{4} - \dfrac{0^4}{4}\right] = \boxed{250}$.

Interprétation graphique :

Soit f une fonction définie sur représentée ci-dessous.



$\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; c'est l'aire représentée en bleu.

μ, valeur moyenne, est la valeur telle que $\mathscr{A}$ soit égale à l'aire du rectangle, construit sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ de hauteur μ.

III.2 Aire entre deux courbes

Propriété

Soient deux fonctions f et g, définies sur un intervalle $[a\,;\,b]$ telle que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a\,;\,b]$.
L'aire comprise entre $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est :

$$\int_a^b \left[g(x) - f(x)\right]\,\mathrm{d}x$$

Illustration :

Soient f et g définies par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \sqrt{x} - 1$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
L'aire colorée est $\displaystyle\int_1^5 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$.