# Feuille d'exercices n° 3 (suites, loi uniforme discrète, schéma de Bernoulli, coefficients binomiaux)

## Probabilités et suites

### Exercice I

Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes.

Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

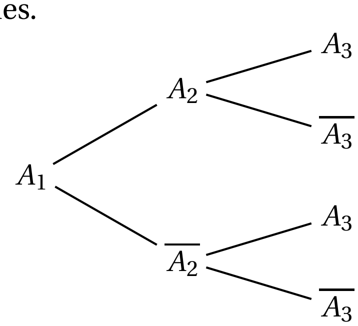
— parmi les clients qui achètent un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;

— parmi les clients qui n'achètent pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geqslant 1$, on note $A_n$ l'évènement : « le client achète un melon au cours de la semaine $n$ ».

Ainsi a-t-on $p(A_1) = 1$.

1. (a) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-contre, relatif aux trois premières semaines.




   (b) Démontrer que $p(A_3) = 0,85$.

   (c) Sachant que le client achète un melon au cours de la semaine 3, quelle est la probabilité qu'il en ait acheté un au cours de la semaine 2 ?

   Arrondir au centième.

Dans la suite, on pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$ :
   $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

2. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$ : $p_n > 0,8$.
   Démontrer que la suite $(p_n)$ est décroissante.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$ : $v_n = p_n - 0,8$.

   (a) Démontrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme $v_1$ et la raison.

   (b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,
   $p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$.

   (c) Déterminer la limite de la suite $(p_n)$.

## Loi uniforme

### Exercice II

1. $Z$ suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,100\}$.
   Calculer $p(Z \leqslant 25)$, $p(20 < Z < 46)$, $p(Z \geqslant 46)$.

2. $X$ suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et $n$.
   Son espérance est égale à 10. Que vaut $n$ ?

3. $X$ suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,1000\}$.

   (a) Calculer $p(100 < X < 200)$.

   (b) Calculer $k$ tel que $p(300 \leqslant X \leqslant k) = 0,02$

### Exercice III

1. on lance un dé parfaitement équilibré à 12 faces. On note $X$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le résultat du lancer du dé.
   La loi de $X$ est-elle uniforme ? Justifier la réponse.

2. On considère la loi uniforme sur l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\cdots\,;\,n\}$.
   Quelle est la valeur de la probabilité d'un évènement élémentaire ?

## Exercice IV

Dans un jeu de 32 cartes, on attribue un nombre de points aux cartes.
Pour 7 ; 8 ; 9 et 10, le nombre de points est le nombre marqué sur la carte. Pour Valet, Dame et Roi, le nombre de points est 10 et pour As, le nombre de points est 11.
Les cartes sont supposés indiscernables.
On tire une carte au hasard. On considère la variable aléatoire $X$ qui associe à la carte son nombre de points moins 6.
$X$, suit-elle une loi uniforme sur $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\}$ ?

# Loi binomiale

## Exercice V

Un. QCM contient quatre questions. Pour chaque question, il y a trois réponses proposées. Une seule est juste.
Un candidat décide de répondre au hasard à chaque question de ce QCM.
Montrer qu'on peut modéliser la stratégie de réponse du candidat par un schéma de Bernoulli, dont on donnera les paramètres.

## Exercice VI

Lors d'un jeu de rôle, un candidat doit passer une épreuve en lançant trois fois de suite un dé à huit faces.
Une porte est dessinée sur cinq des faces du dé. Un puits est dessiné sur les autres faces.
Pour gagner son épreuve, le candidat doit obtenir trois portes. Quelle est la probabilité qu'il arrive à gagner son épreuve ?

## Exercice VII

1. Déterminer $\binom{8}{1}$, $\binom{9}{1}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ où $n \in \mathbb{N}$.
2. On admet que $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   (a) Calculer $\binom{9}{2}$, $\binom{30}{2}$, $\binom{100}{2}$.
   (b) en déduire $\binom{100}{98}$

## Exercice VIII

En utilisant le triangle de Pascal, déterminer :
$\binom{7}{2}$, $\binom{7}{4}$, $\binom{6}{4}$.

## Exercice IX

1. Calculer :
   (a) $\binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$
   (b) $\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$
   (c) $\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}$
2. Quelle conjecture peut-on faire ?