

# Maths complémentaires : feuille d'exercices sur la dérivation n° 4

## Exercice I

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ . Étudier les variations de  $f$ .

## Exercice II

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x}{2x+1} - 4x$  pour  $x \neq -\frac{1}{2}$ .

1. Calcule  $f'(x)$ .
2. Étudier le signe de  $f'(x)$ .
3. Étudier les limites de  $f(x)$  aux bornes de l'ensemble de définition de  $f$ .
4. En déduire le tableau de variation de  $f$ .

## Exercice III

On considère une entreprise qui produit du jus de fruits. Sa capacité quotidienne de production est égale à 600 L, et, pour  $x$  hL de jus de fruits, le coût total de production quotidien est donné, en dizaines d'euros par

$$C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x + 50, \text{ où } x \in [0; 6].$$

- 1) Vérifier que  $C(0) \neq 0$ . Donner une explication concrète de ce fait.
- 2) (a) Quelle conjecture peut-on formuler sans calcul sur le sens de variation de  $C$  sur  $[0; 6]$ ? Expliquer.  
(b) Prouver cette conjecture par le calcul.

## Exercice IV

On s'intéresse à la même entreprise. Le coût moyen de fabrication de 1 hL, si  $x$  hL ont déjà été produits, avec  $x > 0$ , est défini par

$$CM(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

où  $C$  est la fonction de l'exercice précédent.

1. Montrer que, pour tout  $x$  dans  $]0; 6]$ , on a :

$$C'_M(x) = \frac{(x-5)(x^2+2x+10)}{x^2}.$$

2. En déduire la quantité de production pour laquelle le coût moyen est minimal et préciser ce coût en euro.

3. En sciences économiques, on appelle coût marginal le coût de production d'une unité supplémentaire.

Ce coût, qui dépend de la quantité  $x$  déjà produite, est modélisé par la fonction  $C'$ , dérivée de  $C$ .

Montrer que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

## Exercice V

On pose  $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .

- 1) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$f'(x) = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}.$$

- 2) Étudier le signe de  $f'(x)$ .
- 3) En déduire que, pour tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$f(x) \leq \frac{x^3+2}{x^2+1} \leq 2.$$

## Exercice VI Forme optimale d'une casserole

Cet exercice propose de comprendre pourquoi les casseroles ont toutes la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume  $v$  **donné** en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On note  $h$  la hauteur d'une casserole,  $x$  le rayon du disque du fond et  $S$  l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

1. Montrer que  $S = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ .

2. Étudier les variations de la fonction

$$f : x \mapsto \pi x^2 + \frac{2v}{x} \text{ sur } ]0; +\infty[.$$

On notera  $\alpha$  le nombre vérifiant  $\alpha^3 = \frac{v}{\pi}$ .

Alors :  $\alpha = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$

3. En déduire, pour un volume  $v$  fixé, la valeur de  $x$  pour laquelle le coût de fabrication d'une casserole est le plus bas. Notons  $\alpha$  cette valeur.
4. Montrer, que pour cette valeur  $\alpha$  du rayon, la hauteur de la casserole est aussi  $\alpha$ . Conclure quant à la forme des casseroles.