

Exercices sur les suites arithmético-géométriques

I Bac ES Amérique du Nord juin 2019

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois;
- la location commence le 1^{er} jour du mois et se termine le dernier jour du même mois;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.

Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où, pour tout entier naturel n , u_n représente le nombre de voitures louées le n -ième mois après le mois de janvier 2019. Ainsi $u_0 = 280$.

On admet que cette modélisation conduit à l'égalité : $u_{n+1} = 0,9u_n + 42$.

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 420$.
 - (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera le premier terme v_0 et la raison.
 - (b) Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que $u_n = -140 \times 0,9^n + 420$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n) puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.

On souhaite utiliser l'algorithme ci-dessous :

```
N ← 0
U ← 280
Tant que .....
    N ← N + 1
    U ← .....
Fin Tant que
```

- (a) Recopier et compléter l'algorithme.
- (b) Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
- (c) En déduire le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures.

II Bac ES Pondichéry avril 2014

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 + n .

1. Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
 - (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année 2013 + n .

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

Variables :

U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
 | Affecter $0,6 \times U + 120$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 1

Variables :

U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N
Pour i de 1 à N faire
 | Affecter 115 à U
 | Affecter $0,4 \times U + 115$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 2

Variables :

U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers

Début

Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
 | Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 3

- (b) Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
 - (b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
 - (d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier. Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.