Équations différentielles et primitives d'une fonction

Table des matières

I Équations différentielles généralités)

Définition

Une équation ndifférentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction**.
L'égalité que forme cette équation différentielle se présente comme une relation entre la fonction inconnue, sa dérivée, une ou plusieurs dérivées d'ordres différents et éventuellement une autre fonction.
La fonction inconnu est souvent appelée y.

Exemples :

a) $y' - 4y = 2x - 1$ est une équation différentielle.

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ est une équation différentielle.

Définition

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver toutes les fonctions vérifiant cette équation.

Remarque : on ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles . . .

II Équations différentielles du type $y' = ay + b$

II.1 Équations différentielles $\boldsymbol{y' = ay}$

théorème

Soit a un réel.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions $f : x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.
Si, de plus, $y(x_0) = k$ pour x_0 et k donnés, la fonction est unique et c'est la fonction $x \mapsto ke^{a(x-x_0)}$.

Démonstration :

- Soit C un réel . Soit $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{ax}$.
  $f'(x) = C \times aw\mathrm{e}^{ax} = af(x)$ donc f est solution de l'équation $y' = ay$.
- **Réciproquement** :
  Soit g une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
  La fonction : $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ ne s'annule pas; on pose $h(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$.
  Calculons $h'(x)$:
  h est un produit de deux fonctions :
  $h'(x) = g'(x) \times \mathrm{e}^{-ax} + g(x) \times \left[-a \times \mathrm{e}^{-ax}\right] = ag(x)\mathrm{e}^{-ax} - ag(x)\mathrm{e}^{-ax} = 0$ car $g'(x) = ag(x)$.
  Par conséquent : $h' = 0$.
  On en déduit que h est une fonction constante.
  Il existe C tel que $h(x) = C$ donc $\dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^{ax}} = C$ d'où $\boxed{g(x) = C\mathrm{e}^{ax}}$.
- Si $y(x_0) = k$, alors $C\mathrm{e}^{ax_0} = k$ donc $C = \dfrac{k}{\mathrm{e}^{ax_0}} = k\mathrm{e}^{-ax_0}$.
  D'où : $f(x) = k\mathrm{e}^{a(x-x_0)}$

II.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

Théorème (admis)

Soient a et b deux réels non nuls.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions $f : x \mapsto C\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où C est une constante réelle.

Remarque : la fonction : $x \mapsto -\dfrac{b}{a}$ est une fonction constante, solution particulière de cette équation différentielle.

Exemple : soit l'équation différentielle $y' = 3y + 2$.
Elle est de la forme y'=ay+b avec $a = 3$ et $b = 2$.
Les solutions sont les fonctions : $\boxed{x \mapsto k\mathrm{e}^{3x} - \dfrac{2}{3}}$.

III Équation différentielle de la forme $y' = f$

Définition

Spoit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f toute fonction dérivable sur I solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple :
Soit l'équation différentielle $y' = 2x+3$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2+3x$ est une solution de cette équation différentielle.
On dit que F est une **primitive** de la fonction $f : x \mapsto 2x+3$.

Remarque : g définie par $g(x) = x^2+3x+7$ est aussi une solution. Il n'y a donc pas unicité d'une primitive.

Théorème admis

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives définies sur I.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f.

- Pour tout réel k, $F+k$ est aussi une primitive de f.
- Si G est une primitive de f sur I, il existe k tel que $G = F+k$.

Remarque : il suffit donc de connaître une primitive pour les avoir toutes; ill suffit d'ajouter une constante quelconque.

Propriété admise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Quels que soient les réels $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.

IV Primitives d'une fonction continue

IV.1 Primitives des fonctions usuelles

Fonction $f : x \mapsto \cdots$	Une primitive $F : x \mapsto \cdots$	sur$\cdots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
$x^n \ n \in \mathbb{N}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}\ (x>0)$	$\ln(x)$	$]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{x^n}\ (n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ (x>0)$	$\sqrt{x}$	$]0\ ;\ +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

IV.2 Primitives et opérations

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G, u désigne une fonction dérivable, À dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction f du type$\cdots$	Une primitive F du type$\cdots$	Conditions
$f+g$	$F+G$	
kf	kF	k réel
$U'\mathrm{e}^u$	e^u	
$2u'u$	u^2	
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ sur I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u)$	$u > 0$ sur I