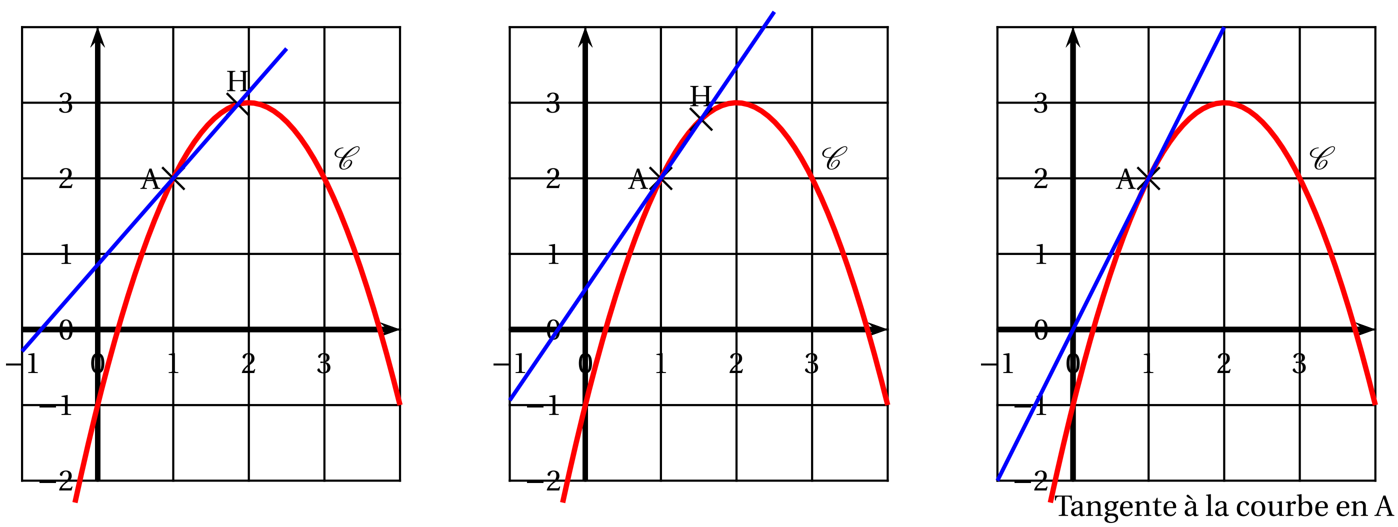
Dérivation

Table des matières

I Nombre dérivé, tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et H le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a+h$.
Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche de A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche (dans certains cas) d'une « droite limite ».



Définition

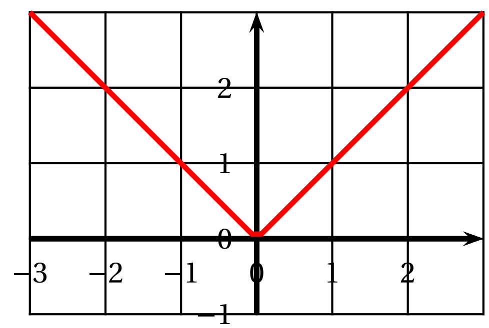
Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite qui est un nombre réel quand h tend vers 0, on appelle $f'(a)$ ce nombre limite qu'on appelle nombre dérivé de f en a.
On dit que f est dérivable en a. On écrit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est la droite qui passé par $A(a\,;\,f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $a=3$.
$\dfrac{f(a+h-f(a)}{h}=\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h}=\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$.
Lorsque h tend vers 0, $6+h$ tend vers 6.
f est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Remarque : il existe des fonctions n'admettant pas de nombre dérivé.
Exemple : soit f la fonction valeur absolue $x : x\mapsto |x|$.
Rappel : $|x|=\begin{cases} x \text{ si } x\geqslant 0 \\ -x \text{ si } x\leqslant 0\end{cases}$.
Étudions si f a un nombre dérivé en 0.
$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|-|0|}{h}=\dfrac{|h|}{h}$.

- Si $h>0$, $\dfrac{|h|}{h}=\dfrac{h}{h}=1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{|h|}{h}=-1$.
- Si $h<0$, $\dfrac{|h|}{h}=\dfrac{-h}{h}=-1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{|h|}{h}=1$

L'expression n'a donc **pas de limite** en 0, la courbe représentative de f n'a pas de tangente en 0.
Remarque : cette expression a une limite à gauche et une limite à droite, on dit que la courbe admet deux demi-tangentes.



Courbe représentative de $x\mapsto |x|$

II Équation de la tangente

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a\in I$.
On suppose que f est dérivable en a, donc que f admet un nombre dérivé $f'(a)$ en a.
Alors l'équation de la tangente en a est $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

Démonstration : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc l'équation de cette tangente est de la forme $y=f'(a)x+p$.
Calcul de p : par définition, la tangente passe par le point $A(a\,;\,f(a))$.

Par conséquent : $f(a) = f'(a)a + p$ d'où $p = f(a) - f'(a)a$.
Alors : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 3$. On a trouvé précédemment $f'(3) = 6$.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 3 est : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ donc $y = 6(x-3) + 9$ d'où $\boxed{y = 6x - 9}$

III Dérivée d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On suppose que f admet un nombre dérivé $f'(x)$pour tout x de I.
On appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

III.1 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ constante réelle	f'(x)=0	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n entier, $n \geqslant 2$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$, n entier, $n \geqslant 2$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$

Exemples :

- $f(x) = 3$; $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^5$; $f(x) = x^n$ avec $n = 5$.
  Alors : $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n = 7$.
  Alors : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^{n+1}} = -\dfrac{1}{x^{7+1}} = -\dfrac{1}{x^8}$

III.2 Dérivée et opérations

Soient k un réel et u et v deux fonction dérivables sur in intervalle I.

Fonction	Dérivée
(ku)	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}(u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}(v \neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples :

- $f(x)=5x^3$; $f=ku$ avec $k=5$ et $u(x)=x^3$.
  Alors : $f'=(ku)'=ku'$ avec $u'(x)=3x^2$ d'où : $f'(x)=5\times 3x^2=\boxed{15x^2}$.
- $f(x)=3x^2+5x$.
  $f=u+v$ avec $u(x)=3x^2$ et $v(x)=5x$.
  $f'=(u+v)'=u'+v'$ avec $u'(x)=3\times 2x=6x$ et $v'(x)5$.
  Par conséquent : $\boxed{f'(x)=u'(x)+v'(x)=6x+5}$
- $f(x)=5x^2\left(7x^2+5x+1\right)$.
  $f=uv$ avec $u(x)=5x^2$ et $v(x)=7x^2+5x+1$.
  On a alors : $f'=(uv)'=u'v+uv'$.
  $u(x)=5\times x^2$ donc $u'(x)=5\times 2x=10x$
  v est une somme de fonctions, donc $v'(x)=7\times 2x+5\times 1+0=14x+5$.
  Alors : $f'(x)=10x\times\left(7x^2+5x+1\right)+5x^2\times(14x+5)=70x^3+50x^2+10x+70x^3+25x^2=\boxed{140x^3+75x^2+10x}$
- $f(x)=(3x+5)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

  $$f=uv \text{ avec } \begin{cases} u(x)=3x+5 \\ v(x)=\sqrt{x} \end{cases}$$

  $$f'=(uv)'=u'v+uv' \text{ avec } \begin{cases} u'(x)=3 \\ v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

  $$f'(x)=3\sqrt{x}+(3x+5)\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+(3x+5)}{2\sqrt{x}}=\boxed{\frac{9x+5}{2\sqrt{x}}}$$

- $f(x)=\dfrac{7x+5}{2x+3}$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

  $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=7x+5 \\ v(x)=2x+3 \end{cases}$.

  $f'=\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)=7 \\ v'(x)=2 \end{cases}$.

  $f'(x)=\dfrac{7(2x+3)-2(7x+5)}{(2x+3)^2}=\boxed{\dfrac{11}{(2x+3)^2}}$

IV Dérivée et variation d'une fonction

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si, pour tout x de I, $f'(x)>0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x)<0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si, pour tout x de I, $f'(x)=0$, alors f est constante sur I.