

## Correction des exercices sur les dérivées (2)

### Exercice I

Soit  $f : x \mapsto x|x|$ .  

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h| \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right) = 0.$$
 $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ .

### Exercice II

Soit la fonction  $f : x \mapsto 6x^2 + 12x - 1$ , définie sur l'intervalle  $[-10; 18]$ .

1.  $f'(x) = 6 \times 2x + 12 = 12x + 12 = \boxed{12(x+1)}$ .
2. •  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$   
 •  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$
3. **Tableau de variation :**

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-7$	$+\infty$

Les limites à l'infini se trouvent en factorisant l'expression de  $f(x)$  par  $x^2$ .

### Exercice III

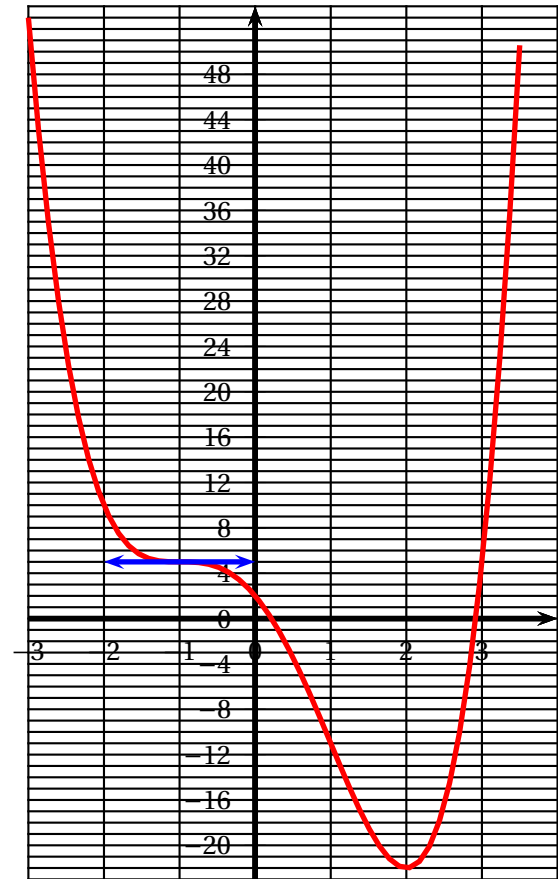
$f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 2$ .

1.  $f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x^3 - 3x - 2)$ .  
 Or  $4(x-2)(x+1)^2 = 4(x-2)(x^2 + 2x + 1) = 4[x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2] = 4[x^3 - 3x - 2]$ .  
 Par conséquent :  $f'(x) = 4(x-2)(x+1)^2$

2. On en déduit que  $f'(x)$  est du signe de  $x-2$  car  $4 > 0$  et  $(x+1)^2 \geq 0$  en s'annulant en  $-1$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$
$4(x-2)$		-	0	+
$(x+1)^2$	+	0	+	+
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$5$	$-22$	$+\infty$

3. La fonction a un minimum,  $-22$ , atteint en  $x = 2$ .  
**Remarque :** la courbe représentative de  $f$  admet une tangente horizontale en  $-1$  puisque  $f'(-1) = 0$ .



### Exercice IV

On considère les trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  définies par :

- $f(x) = x^3 - 2x + 1$ .  

$$f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$\approx 2,09$	$\approx -0,09$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la courbe  $\mathcal{C}_f$  coupe l'axe des abscisses en trois points.

- $g(x) = x^3 - 2x - 1$ .  
 $g'(x) = f'(x)$ . On remarque que  $g(x) = f(x) - 2$ .

Le tableau de variation est alors :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$g(x)$	$-\infty$	$\approx 0,09$	$\approx -2,09$	$+\infty$

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, la courbe  $\mathcal{C}_g$  coupe l'axe des abscisses en trois points.

- $h(x) = x^3 + 2x - 1$ .  
 $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ .  
 $h$  est croissante.

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

La courbe  $\mathcal{C}_h$  n'a qu'un point d'intersection avec l'axe des abscisses.

### Exercice V

On pose :  $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x - 20$ .

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3 > 0$  (somme de nombres positifs).

On en déduit que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = x^5 \left( 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{20}{x^5} \right).$$

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{20}{x^5} \right) = 1$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On en déduit le tableau de variation :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation  $x^5 + 2x^3 + 3x - 20 = 0$ , donc  $f(x) = 0$  admet une solution; celle-ci est unique car  $f$  est monotone (croissante).