Correction de la feuille d'exercices n° 3
(loi uniforme discrète, schéma de Bernoulli, coefficients binomiaux)

Exercice I

1. Z suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1 ; 2 ; \cdots ; 100\}$.

   - $p(Z \leqslant 25) = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$
   - $p(20 < Z < 46) : \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$ car il y a 25 entiers compris entre 20 et 46 exclus.
   - $p(Z \geqslant 46) = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$.

2. X suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et n.
   $E(X) = \dfrac{(n+1)}{2} = 10$ donc $n+1 = 20$ d'où $\boxed{n = 19}$
3. X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1 ; 2 ; \cdots ; 1\,000\}$.

   (a) $p(100 < X < 200) = \boxed{\dfrac{99}{1\,000}}$

   (b) $p(300 \leqslant X \leqslant k) = 0,02$
   $\Leftrightarrow \dfrac{k-300+1}{1000} = 0,02 \Leftrightarrow k - 299 = 20$
   $\Leftrightarrow \boxed{k = 319}$

Exercice II

1. Puisque tous les résultats entre 1 et 12 sont possibles et équiprobables, la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; \cdots ; 12\}$.
2. La probabilité d'un évènement élémentaire est $\boxed{\dfrac{1}{n}}$.

Exercice III

X peut prendre les valeurs $7-6=1$; $8-6=2$; $9-6=3$; $10-6=4$ et $11-6=5$.

- $p(X=1) = p(X=2) = p(X=3) = p(X=5) = \dfrac{4}{32} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ (4 cas favorables à chaque fo.is)
- $p(X=4) = \dfrac{16}{32} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

On en déduit que X ne suit pas une loi uniforme sur $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.

Exercice IV

L'hypothèse que le candidat répond « au hasard » suggère qu'il choisit de manière aléatoire et équiprobable une réponse parmi les trois.
Le choix d'une réponse à une question est donc une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
On peut supposer que les questions (et les réponses) sont indépendantes les unes des autres.
La répétition de quatre fois la même épreuve de Bernoulli est un schéma de Bernoulli de paramètres n=4 et $p = \dfrac{1}{3}$.

Exercice V

L'expérience de répéter trois fois le lancer du dé peut être assimilée à un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=\dfrac{5}{8}$.

La probabilité d'obtenir trois succès est $\boxed{p(SSS)=\left(\dfrac{5}{8}\right)^3}$

Exercice VI

1. $\dbinom{8}{1}=\boxed{8}$

   $\dbinom{9}{1}=\boxed{9}$

   $\dbinom{n}{1}=\boxed{n}$

   $\dbinom{n}{n-1}=\dbinom{n}{1}=\boxed{n}$

2. On admet que $\dbinom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

   (a) $\dbinom{9}{2}=\dfrac{9\times 8}{2}=\boxed{36}$

   $\dbinom{30}{2}=\dfrac{30\times 29}{2}=\boxed{6525}$

   $\dbinom{100}{2}=\dfrac{100\times 99}{2}=50\times 99=\boxed{4950}$.

   (b) On en déduit : $\dbinom{100}{98}=\dbinom{100}{100-98}=$

   $\dbinom{100}{2}=\boxed{4950}$

Exercice VII

En utilisant le triangle de Pascal, on trouve :

$\dbinom{7}{2}=\boxed{21}$

$\dbinom{7}{4}=\boxed{35}$

$\dbinom{6}{4}=\boxed{15}$.

Exercice VIII

1. Calculer :

(a) $\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}=\boxed{4}$

(b) $\binom{3}{0}+\binom{3}{1}+\binom{3}{2}+\binom{3}{3}=\boxed{8}$

(c) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=\boxed{16}$

2. On peut conjecturer que la somme des coefficients binomiaux de rang n est égale à 2^n.