Feuille d'exercices sur les limites de fonctions (2)

Exercice I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2+1}$.
Pour que la courbe $\mathscr{C}_g$ admette une asymptote, il faut que $g(x)$ ait une limite finie à l'infini ou que $g(x)$ ait une valeur interdite et que la limite en cette valeur soit infinie.

- g est définie sur $\mathbb{R}$.
- Limite à l'infini : on a une forme indéterminée.
  $g(x)=\dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}=\dfrac{\frac{2}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$.
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)=-1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)=1$.
  Par quotient : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=-1$.
  La droite d'équation $y=-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice II

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1-x}$.
On a une forme indéterminée pour le calcul de la limite à l'infini.
$f(x)=\dfrac{\cancel{x^2}\left[1+\frac{2}{x^2}\right]}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=x\times\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=-1$.
  Par produit et quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$.
- De même : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ car la limite est celle de $-x$. (Voir calculs précédents)

b) $g(x)=\dfrac{x+3}{-2x^2+1}$.
On a une forme indéterminée.
$\dfrac{x+3}{-2x^2+1}=\dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\frac{3}{x}}{-2+\frac{1}{x^2}}$.
On a :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{1}{x}^2\right)=-2$.
- par produit et quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0}$

Pour la limite en $+\infty$, on a la même réponse : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0}$
On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$

Exercice III

a) Calcul de : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x}{3x-6}$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x=2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(3x-6)=0$ avec $3x-6>0$
- Par quotient, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{x}{3x-6}\right)=+\infty}$

b) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x}{3x-6}$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}=2$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}(3x-6)=0$ avec $3x-6<0$
- Par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\dfrac{x}{3x-6}\right)=-\infty}$ (quotient de 2, positif, par un nombre négatif)

c) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\dfrac{x^2}{4-x}$:

- $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} x^2=16$
- $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(4-x)=0$ avec $4-x<0$
- Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}}\left(\dfrac{x^2}{4-x}\right)=-\infty}$

d) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \dfrac{x^2}{4-x}$:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} = 16$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} (4-x) = 0$ avec $4-x > 0$
- donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \left(\dfrac{x^2}{4-x}\right) = +\infty}$

e) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 4 = 4$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$
- Par somme et différence, on trouve :
  $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty}$

f) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 4 = 4$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$
- Par somme et différence, on obtient une forme indéterminée !
- On lève l'indétermination :
  On remarque que $4 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} = 4 + \dfrac{x-2}{x^2}$.
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 4 = 4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 = 0$ avec $x^2 > 0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right) = -\infty$
  D'où : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(4 + \dfrac{x-2}{x^2}\right) = -\infty}$