

Correction de la feuille d'exercices sur la loi binomiale (3)

Exercice I d'après bac ES Liban mai 2018

- On répète 80 fois la même expérience aléatoire. Tous les « tirages » sont identiques, indépendants. Chaque expérience possède exactement deux issues : S et \bar{S} .
De plus : $p(S) = 0,02192$. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,02192$.
- $E(X) = np : 80 \times 0,02192 = 1,7536$.
En moyenne environ 1;7 personnes feront sonner le portique.
- La probabilité qu'au moins une personne du groupe fasse sonner le portique est : $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - p)^{80} = 1 - (1 - 0,02102)^{80} \approx \boxed{0,830}$
- La probabilité qu'au maximum 5 personnes fassent sonner le portique est :
 $p(X \leq 5) \approx 0,992$ (à la calculatrice).
- En utilisant le mode table de la calculatrice on obtient : $p(X \leq 2) \approx 0,744$ et $p(X \leq 3) \approx 0,901$. Donc 3 est le plus petit entier tel que $p(X \leq n) \geq 0,9$

Exercice II d'après Bac ES Antilles Guyane septembre 2018

- On veut calculer $p(X = 202) = \binom{202}{200} \times 0,971^{202} = 0,971^{202} \approx \boxed{0,003}$.
La probabilité que tous les clients se présentent à l'embarquement est environ égale à 0,003.
- On veut calculer $p(X = 201) = \binom{202}{201} \times 0,971^{201} \times (1 - 0,971)^{202-201} = 202 \times 0,971^{201} \times 0,29 \approx \boxed{0,016}$.
La probabilité qu'un seul client parmi les 202 qui ont réservé ne se présente pas à l'embarquement est environ égale à 0,016. Ainsi $p(X > 200) = p(X = 201) + p(X = 202) \approx \boxed{0,018}$.
La probabilité que la compagnie se trouve en situation de surréservation est environ égale à 0,018.

Exercice III (d'après Métropole ES juin 2017)

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.

Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

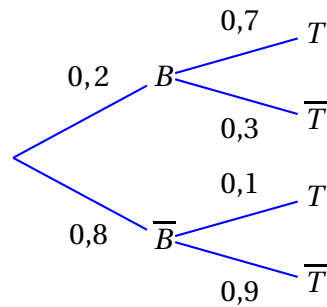
- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas ;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'événement : « l'angine du malade est bactérienne » ;
- T l'événement : « le test effectué sur le malade est positif ».

On rappelle que si E et F sont deux événements, $p(E)$ désigne la probabilité de E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de E sachant que F est réalisé. On note \bar{E} l'événement contraire de E .

1) Arbre :



2) (a) $p(B \cap T) = p_B(T) \times p(B) = 0,7 \times 0,2 = \boxed{0,14}$

(b) On applique la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(B \cap T) + p(\bar{B} \cap T)$$

$$= 0,14 + 0,1 \times 0,8 = \boxed{0,22}$$

(c) $p_T(B) = \frac{B \cap T}{p(T)} = \frac{0,14}{0,22} = \frac{14}{22} = \boxed{\frac{7}{11}}$

3) On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine.

On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

(a) Pour chacun des malades atteints d'une angine, il n'y a que deux issues possibles, le test est positif ou pas. Il s'agit donc de la répétition de cinq épreuves de Bernoulli dont la probabilité du succès est égale à 0,22.

X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 5 ; p = 0,22)$.

(b) $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - (1 - 0,22)^5 = \boxed{1 - 0,78^5 \approx 0,711}$

(c) $E(X) = np = 5 \times 0,22 = \boxed{1,1}$

Exercice IV

1) F donne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un succès : « Obtenir FACE », lorsque l'on réalise de manière indépendante une même expérience de Bernoulli dont la probabilité d'être un succès est 0,2.

Donc F suit la loi géométrique de paramètre $p = 0,2$.

2) $p(F = 3) = (1 - 0,2)^3 - 1 \times 0,2 = 0,128$.

3) $p(F \leq 4) = 1 - (1 - 0,2)^4 = 0,5904$.

4) $E(F) = \frac{1}{0,2} = 5$ donc on peut « espérer » obtenir « FACE » en cinq essais.

Exercice V

On note X le nombre cartes qu'il faut tirer avec remise dans un jeu de 32 cartes pour avoir un premier As.

1. Justifier que X suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
2. Calculer la probabilité qu'il faille tirer exactement 6 cartes pour avoir un premier As.
3. Calculer la probabilité qu'il faille tirer plus de 6 cartes pour avoir un premier As.
4. Calculer la probabilité qu'il faille tirer au plus 6 cartes pour avoir un premier As