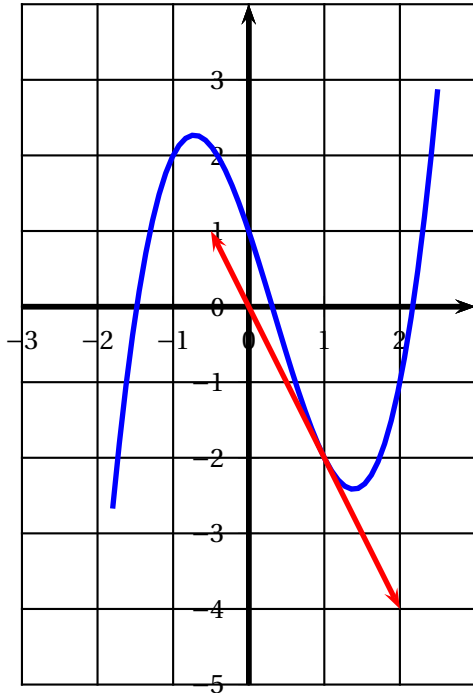


## Exercices sur la dérivation (1)

### Exercice I

Une fonction  $f$  est représentée ci-dessous, ainsi que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.



$f'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente en 1. •• Celle-ci passe par les points O et B de coordonnées O(0; 0) et A(1; -2). Alors :  $f'(1) = \frac{y_A - y_0}{x_A - x_0} = \frac{-2 - 0}{1 - 0} = -2$ ;  $f'(1) = -2$

### Exercice II

1. Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

Pour tout  $x \neq 0$  :  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

2. L'équation réduite de la tangente au point  $A(a; f(a))$  est :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Ici,  $a = 2$  donc  $f(2) = \frac{1}{2}$  et  $f'(2) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ .

L'équation est alors :  $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$  donc

$$y = -\frac{1}{4}x + 1$$

### Exercice III

$h$  est une fonction dérivable en -3 telle que  $h(-3) = 5$  et  $h'(-3) = -3$ .

L'équation réduite de la tangente en -3 est :

$$y = h'(-3)(x - (-3)) + h(-3) \iff y = -3(x - (-3)) + 5$$

$$\iff y = -3x - 4$$

### Exercice IV

$f$  est une fonction dérivable en 7. Dans un repère, la tangente à la courbe en 7 a pour équation  $y = 0,5x - 3$ .

- $f'(7)$  est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 7, donc  $f'(7) = 0,5$ .
- En  $x = 7$ , la courbe et la tangente ont un point commun, donc  $f(7) = 0,5 \times 7 - 3 = 0,5$ ;  $f(7) = 0,5$ .

### Exercice V

On pose  $f(x) = x^3 - x - 1$ , où  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .

2.  $f'(2) = 3 \times 2^2 - 1 = 11$

$f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 5$

L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \iff y = 11(x - 2) + 5 \iff$$

$$y = 11x - 17$$

### Exercice VI

On pose  $f(x) = \frac{1}{4x - 1}$ , où  $x \in \left] \frac{1}{4}; +\infty \right[$ .

1.  $f = \frac{1}{u}$  avec  $u(x) = 4x - 1$ .

$$f' = \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \text{ avec } u'(x) = 4.$$

D'où :  $f'(x) = -\frac{4}{(4x - 1)^2}$

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{3}{4}$  est :

$$y = f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right).$$

$$\bullet f'\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{4}{\left(4 \times \frac{3}{4} - 1\right)^2} = -1$$

$$\bullet f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4 \times \frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{2}$$

L'équation donne :  $y = -\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \iff$

$$y = -x + \frac{5}{4} \text{ c.q.f.d.}$$

### Exercice VII

On considère la fonction  $k$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$k(x) = 2x^3 - x - 1.$$

1.  $k'(x) = 2 \times 3x^2 - 1 = 6x^2 - 1.$

$$k'(0) = -1$$

2. L'équation réduite de la tangente en 0 est :

$$y = k'(0)(x - 0) + k(0) \iff \boxed{y = -x - 1}$$

### Exercice VIII

Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes :

a)  $f(x) = x\sqrt{x}$

$$f = uv \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}.$$

$$f' = (uv)' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}.$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3x}{2\sqrt{x}}}$$

b)  $f(x) = -5x^3e^x$

$$f = kuv \text{ avec } k = -5; u(x) = x^3; v(x) = e^x.$$

$$f = (kuv)' = k \times (uv)' = k \times (u'v + uv') \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f'(x) = -5[3x^2e^x + x^3e^x] - 5(x^3 + 3x^2)e^x = \boxed{-5x^2(x+3)e^x}$$

c)  $f(x) = \frac{4x}{(x+1)^2} = 4 \times \frac{x}{(x+1)^2}.$

$$f = k \times \frac{u}{v} \text{ avec } k = 4; u(x) = x; v(x) = (x+1)^2$$

$$f = k \times (u'v + uv').$$

$$u'(x) = 1$$

$$v(x) = x^2 + 2x + 1 \text{ donc } v'(x) = 2x + 2 = 2(x+1).$$

$$\text{Alors : } f'(x) = 4 \times \left[ \frac{(x+1)^2 - x \times 2(x+1)}{[(x+1)^2]^2} \right] = 4 \times \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = \boxed{\frac{4(x-1)}{(x+1)^3}}$$

d)  $f(x) = \frac{3x+1}{5x+4}$

$$f'(x) = \frac{3(5x+4) - 5(3x+1)}{(5x+4)^2} \text{ donc } f'(x) = \boxed{\frac{7}{(5x+4)^2}}$$

e)  $f(x) = \frac{x^7}{5x^2-2}$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5} \right\}$

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x^7 \\ v(x) = 5x^2 - 2 \end{cases}.$$

$$f = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 7x^6 \\ v'(x) = 10x \end{cases}.$$

$$\text{Alors : } f'(x) = \frac{7x^6(5x^2-2) - 10x \times x^7}{(5x^2-2)^2} = \frac{35x^8 - 14x^6 - 10x^8}{(5x^2-2)^2} = \frac{25x^8 - 14x^6}{(5x^2-2)^2} = \boxed{\frac{x^6(25x^2-14)}{(5x^2-2)^2}}$$

f)  $f(x) = \frac{x^5}{4-x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$$f'(x) = \frac{5x^4(4-x^2) - (-2x) \times x^5}{(4-x^2)^2} = \frac{20x^4 - 5x^6 + 2x^6}{(4-x^2)^2} = \frac{-3x^6 + 20x^4}{(4-x^2)^2} = \boxed{\frac{x^4(-3x^2+20)}{(4-x^2)^2}}$$