

Maths complémentaires : correction de la feuille d'exercices sur la dérivation n° 4

Exercice I

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 \times \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{ pour } x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

$f'(x)$ est du signe de $(x+2)(x-2)$ donc positif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

Étude des limites.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (« évident »)
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{2} = 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{2}{x} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
- De même : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Tableau de variation

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-2	\searrow	$+\infty$
			$+\infty$	\searrow	2
				\nearrow	$+\infty$

Exercice II

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x}{2x+1} - 4x$ pour $x \neq -\frac{1}{2}$.

$$1. f'(x) = \frac{(2x+1) - 2x}{(2x+1)^2} - 4 = \frac{1}{(2x+1)^2} - 4 = \frac{1 - 4(2x+1)^2}{(2x+1)^2} = \frac{1 - [2(2x+1)]^2}{(2x+1)^2} = \frac{[1 - 2(2x+1)][1 + 2(2x+1)]}{(2x+1)^2} = \frac{(-4x-1)(4x+3)}{(2x+1)^2}$$

2. $f'(x)$ est du signe du numérateur.

Celui-ci s'annule en $-\frac{3}{4}$ et $-\frac{1}{4}$.

Il est négatif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.

3. Étude des limites :

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2x+1} \right) = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} x = -\frac{1}{2}$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} (2x+1) = 0$ avec $2x+1 < 0$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} \frac{x}{2x+1} = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} (4x) = -2.$$

On en déduit $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$.

• De même : $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} \left(\frac{x}{2x+1} \right) = -\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$.

4. Tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	+	-
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$\frac{9}{2}$	\nearrow	$-\infty$
			$-\infty$	\searrow	$\frac{1}{2}$
				\nearrow	$-\infty$

Exercice III

On considère une entreprise qui produit du jus de fruits. Sa capacité quotidienne de production est égale à 600 L, et, pour x hL de jus de fruits, le coût total de production quotidien est donné, en dizaines d'euros par

$$C(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 7x + 50, \text{ où } x \in [0; 6].$$

- 1) $C(0) = 50 \neq 0$: les « coûts fixes » de l'entreprise (ce qu'elle doit dépenser avant de commencer à produire) s'élèvent à 50 euros.
- 2) (a) On peut supposer que C est croissante sur $[0; 6]$ car le coût total de production doit augmenter lorsque la production augmente.

(b) $C'(x) = \frac{1}{2} \times 3x^2 - 6x + 7 = \frac{3x^2 - 12x + 14}{2}$.

$C'(x)$ est du signe de $3x^2 - 12x + 14$.

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 14 = 144 - 168 < 0. \text{ Il n'y a pas de racines}$$

$f'(x)$ est du signe du coefficient de x^2 , 3, donc positif.

C est croissante sur $[0; 6]$.

Exercice IV

On s'intéresse à la même entreprise.

Le coût moyen de fabrication de 1 hL, si x hL ont déjà été produits, avec $x > 0$, est défini par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

où C est la fonction de l'exercice précédent.

1. On a $C_M(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 7 + \frac{50}{x}$

Alors : $C'_M(x) = \frac{1}{2} \times 2x - 3 - \frac{50}{x^2} = x - 3 - \frac{50}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 - 50}{x^2}$

$$\begin{aligned} & \frac{(x-5)(x^2+2x+10)}{x^2} \\ &= \frac{x^3 + 2x^2 + 10x - 5x^2 - 10x - 50}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 - 50}{x^2} \\ &= C'_M(x). \end{aligned}$$

On en déduit que : $C'_M(x) = \frac{(x-5)(x^2+2x+10)}{x^2}$

2. $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)(x^2+2x+10)$ car $x^2 > 0$.
 $x^2+2x+10$ a pour discriminant $\Delta = -36 < 0$ donc
 $x^2+2x+10 > 0$ (signe du coefficient de x^2).
 $C'_M(x)$ est donc du signe de $x-5$ donc positif pour $x \geq 5$.

Tableau de variation :

x	0	5	$+\infty$	
$C'_M(x)$		-	0	+
$C_M(x)$	$+\infty$		$\frac{29}{2}$	$+\infty$

Le coût moyen est minimal pour $x = 5$, donc pour une production de 5 hL, soit 500 L.

3. Le coup marginal pour une quantité produite x est $C(x+1) - C(x) = \frac{C(x+1) - C(x)}{(x+1) - x} \approx C'(x)$.
 $C'(5) = \frac{29}{2}$.
 Lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.

Exercice V

On pose $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$, où $x \in \mathbb{R}$.

$$1) f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - 2x(x^3+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4+3x^2-2x^4-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+3x^2-4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3+3x-4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$$

- 2) $f'(x)$ est du signe du numérateur.
- $x^2+x+4 > 0$ pour tout x car le discriminant est négatif.
 - $f'(x)$ est donc du signe de $x(x-1)$, positif à l'extérieur des racines 0 et 1.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$

- 3) D'après le tableau de variation, sur $[0 ; 1]$, on a :

$$\frac{3}{2} \leq \frac{x^3+2}{x^2+1} \leq 2$$

Exercice VI Forme optimale d'une casserole

Cet exercice propose de comprendre pourquoi les casseroles ont toutes la même forme.

Pour réduire les coûts de fabrication, une entreprise doit fabriquer des casseroles cylindriques de volume v donné en utilisant le moins de métal possible. (on ne tient pas compte du manche)

On note h la hauteur d'une casserole, x le rayon du disque du fond et S l'aire totale (aire latérale + aire du fond).

- Le fond de la casserole a une aire égale à πx^2 .
- La surface latérale a une aire égale à $2\pi x \times h$.
- On sait que le volume est v donc $\pi x^2 h = v$ donc $h = \frac{v}{\pi x^2}$.
- Alors : $S = \pi x^2 + 2\pi x \times \frac{v}{\pi x^2} = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$ après simplification.

$$2. f'(x) = 2\pi x + 2v \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2\pi x - \frac{2v}{x^2} = 2 \left(\frac{\pi x^3 - v}{x^2} \right)$$
 qui est

du signe de $\pi x^3 - v$.

$$\pi x^3 - v \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq \frac{v}{\pi}$$

On sait que la fonction cube est croissante, donc : $x^3 \geq \frac{v}{\pi} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

On pose : $\alpha = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$ Tableau de variation :

x	0	$\alpha = \sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$

3. Le volume de la casserole est bien minimum pour cette valeur α .

4. Pour $x = \alpha$, la hauteur de la casserole est $h = \frac{v}{\pi \alpha^2} = \frac{v \alpha}{\pi \alpha^3} = \frac{v \alpha}{\pi \times \frac{v}{\pi}} = \alpha$

La hauteur de la casserole est égale au rayon de sa base.