Maths complémentaires : correction des exercices sur les suites aithmético-géométriques

I Bac ES Amérique du Nord juin 2019

1. En février, un mois se sera écoulé, donc $n = 1$.
   $u_1 = 0,9u_0 + 42 = 0,9 \times 280 + 42 = \boxed{294}$
2. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = u_n - 420$
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 420 = 0,9u_n + 42 - 420 = 0,9u_n - 378 = 0,9\left(u_n - \dfrac{378}{0,9}\right) = 0,9(v_n - 420) = \boxed{0,9v_n}$.
   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme
   $v_0 = u_0 - 420 = \boxed{-140}$
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -140 \times 0,9^n$. De plus $u_n = v_n + 420$ donc $u_n = \boxed{-140 \times 0,9^n + 420}$.
3. La raison de la suite (v_n) appartient à l'intervalle $]-1;1[$, donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0}$.
   Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 420$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 420$.
   Cela signifie qu'au bout d'un certain nombre de mois, le nombre de véhicules loués va se rapprocher de 420.
4. (a) L'algorithme de seuil complété :

```
N ← 0
U ← 280
Tant que U ⩽ 380
        N ← N + 1
        U ← 0,9 × U + 42
Fin Tant que
```

   (b) À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\boxed{u_{11} \approx 376,1}$ et $\boxed{u_{12} \approx 380,5}$.
   La variable N contient la valeur 12 à la fin de l'exécution de l'algorithme.
   (c) C'est donc en janvier 2020 (12 mois après janvier 2019) que la commune devra augmenter le nombre de voitures.

C'est donc en janvier 2020 que la commune devra augmenter le nombre de voitures.

II Pondichéry ES avril 2014

1. On sait que $u_0 = 115$; sur ces 115 oiseaux, 40 % restent présents ce qui en fait $115 \times 0,40 = 46$. De plus, 120 nouveaux oiseaux sont accueillis en 2013 donc il y en aura au 1er janvier 2014 : $u_1 = 46 + 120 = 166$.
   De même au 1er janvier de l'année 2015, il y en aura $u_2 = 166 \times 0,4 + 120 \approx 186$.
   Il faut donner les résultats à l'unité près puisqu'il s'agit d'un nombre d'oiseaux.
2. (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.

algorithme 1	algorithme 2	algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
U est un nombre réel	U est un nombre réel	U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers	i et N sont des nombres entiers
Début	**Début**	**Début**
Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N	Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire	Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire	| Affecter 115 à U	Pour i de 1 à N faire
| Affecter $0,6 \times U + 120$ à U	| Affecter $0,4 \times U + 115$ à U	| Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
Fin Pour	Fin Pour	Fin Pour
Afficher U	Afficher U	Afficher U
Fin	**Fin**	**Fin**

Dans ces trois algorithmes, la variable U contient le nombre d'oiseaux recueillis l'année $2013+i$, où i est un nombre entier compris entre 1 et N.

Dans l'algorithme 1, on multiplie le nombre d'oiseaux de l'année $2013+n$ par $0,6$ ce qui revient à en prendre 60 % alors qu'il faut en prendre 40 %.

Dans l'algorithme 2, on multiplie le nombre d'oiseaux par le bon coefficient $0,4$ mais on ajoute chaque année 115 alors qu'il faut ajouter 120 oiseaux, comme le dit le texte.

De plus, dans cet algorithme, il ne faudrait pas mettre l'instruction "Affecter 115 à U" dans la boucle POUR, mais avant d'y entrer.

(b) On peut dire que, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1}=0,4\,u_n+120}$ avec $u_0=115$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n=u_n-200$.

(a) Pour tout n, $v_n=u_n-200$ donc $u_n=v_n+200$.

$v_{n+1}=u_{n+1}-200$; or $u_{n+1}=0,4\,u_n+120$, donc

$v_{n+1}=0,4\,u_n+120-200=0,4\,(v_n+200)-80=0,4\,v_n+80-80=\boxed{0,4\,v_n}$

$v_0=u_0-200=115-200=-85$

Donc la suite (v_n) est **géométrique** de raison $\boxed{q=0,4}$ et de premier terme $\boxed{v_0=-85}$.

(b) On sait que l'expression d'une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 et de raison q est : $v_n=v_0\times q^n$ pour tout entier n.

Donc $\boxed{v_n=-85\times 0,4^n}$ pour tout entier n.

(c) On a vu que, pour tout entier n, $u_n=v_n+200$; or $v_n=-85\times 0,4^n$, donc pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n=200-85\times 0,4^n}$.

(d) L'estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013+n$ est $\boxed{200-85\times 0,4^n}$.

Le nombre $0,4^n$ est positif donc le nombre $200-85\times 0,4^n$ est toujours inférieur à 200.

Une capacité d'accueil de 200 oiseaux est donc **suffisante** pour ce centre.

4. On cherche à calculer le nombre total d'oiseaux présents dans le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, autrement dit pour n entier entre 0 et 5 puisque $2018=2013+5$; ce nombre est $u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5$.

On connaît u_0, u_1 et u_2 ; il reste à calculer u_3, u_4 et u_5 :

$$u_3=0,4\times u_2+120=0,4\times 186+120\approx\boxed{195}$$
$$u_4=0,4\times u_3+120=0,4\times 194+120\approx\boxed{198}$$
$$u_5=0,4\times u_4+120=0,4\times 198+120\approx\boxed{199}$$

$u_0+u_1+u_2+u_3+u_4+u_5\approx 115+166+186+194+198+199=\boxed{1\,059}$

Entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018, il y aura 1 058 oiseaux présents au centre ; chacun d'eux rapportant 20 €, le montant total de la subvention touchée sera de $1\,058\times 20=21\,160$ euros.

Autre méthode :

$u_0+u_1+u_2+U_3+u_5+U_5=\left(200-85\times 0,4^0\right)+\left(200-85\times 0,4^1\right)+\left(200-85\times 0,4^2\right)+\left(200-85\times 0,4^3\right)+\left(200-85\times 0,4^4\right)+\left(200-85\times 0,4^5\right)$

$=6\times 200-85\left(0,4^0+0,4^1+\cdots+0,4^5\right)$ (somme de termes consécutifs d'une suite géométrique)

$=1\,300-85\times\dfrac{1-0,4^6}{1-0,4}\approx\boxed{1\,059}$