

Suites : feuille d'exercices (2)

(suites arithmético-géométriques et limites)

I

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.
Soit (v_n) la suite définie $v_n = u_n - 12$.

- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85.
Préciser v_0
- Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
- En déduire que pour tout n , $u_n = (-4) \times 0,85^n + 12$.

II Bac ES Pondichéry avril 2014

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année 2013 + n .

- Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats?
- Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
 - Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'**algorithme 3** permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année 2013 + n .

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

<p>Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers</p> <p>Début Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0,6 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin</p>

algorithme 1

<p>Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers</p> <p>Début Saisir une valeur pour N Pour i de 1 à N faire Affecter 115 à U Affecter $0,4 \times U + 115$ à U Fin Pour Afficher U Fin</p>

algorithme 2

<p>Variables : U est un nombre réel i et N sont des nombres entiers</p> <p>Début Saisir une valeur pour N Affecter 115 à U Pour i de 1 à N faire Affecter $0,4 \times U + 120$ à U Fin Pour Afficher U Fin</p>

algorithme 3

- Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .

- (c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
- (d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier.
Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

III Bac ES Liban 2014

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n) .

On note $a_0 = 2500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année 2013 + n .

1. (a) Calculer a_1 et a_2 .
(b) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2000$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
(b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
(c) Calculer la limite de la suite (a_n) .
(d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	N entier A réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 A prend la valeur 2 500
Traitement :	Tant que $A - 2000 > 50$ A prend la valeur $A \times 0,8 + 400$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N .

- (a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
- (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.