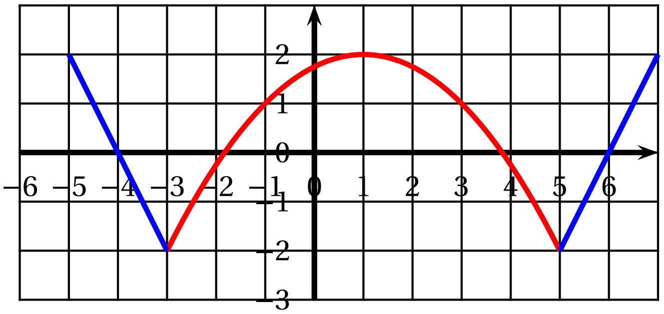
Feuille d'exercices n° 4 (théorème des valeurs intermédiaires)

Exercice I

Soit f une fonction définie sur $[-5\ ;\ 7]$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une encadrement entre deux entiers consécutifs de chacune d'entre elles.

Exercice II

Le tableau de variation d'une fonction continue f est donné ci-dessous.

x	-2	3	5
Variation de f	6 ↘	-1 ↗	2

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle [-2; 5] :

a) $f(x) = 0$

b) $f(x) = 4$

c) $f(x) = -3$

Exercice III

Le tableau de variation d'une fonction continue f est donné ci-dessous.

x	-5	2	5	9
$f(x)$	-10 ↗	5 ↘	$2,5$ ↗	15

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle [-2; 5] :

a) $f(x) = -9$

b) $f(x) = 3$

c) $f(x) = 18$

Exercice IV

Soit f une fonction continue sur [-3; 4].
On sait que $f(-3) = -2$ et $f(4) = 5$.
Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans [-3; 4].

Exercice V

Soit f la fonction définie sur $[-1\ ;\ 3]$ par
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
Montrer qu'il existe au moins un réel c appartenant à $[-1\ ;\ 3]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercice VI

Soit f une fonction continue sur [-5; 8].
On sait que $f(-3) = 5$, $f(1) = -2$ et $f(5) = 7$.
Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins deux solutions dans [-5; 8].

Exercice VII

Soit f la fonction définie sur $[4\ ;\ 9]$ par

$$f(x) = \sqrt{x} + 2x - 12.$$

On admet que f est continue sur $[4\ ;\ 9]$.

1. Montrer que f est croissante sur $[4\ ;\ 9]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur $[4\ ;\ 9]$.

Exercice VIII

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

1. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[0; 1]$.
3. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près de cette solution.