Lois de probabilités à densité

Table des matières

I Notion de densité 1
I.1 Définition 1
I.2 Fonction de répartition 3
II Paramètres d'une variable à densité 3
II.1 Espérance 3
II.2 Variance et et écart-type 3
III Loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ 4
IV Loi exponentielle 6

I Notion de densité

I.1 Définition

Définition

Une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire est dite continue lorsqu'elle peut prendre comme valeurs **tous** les nombres réels d'un intervalle I.

Exemple : Jean attend son bus. Il est certain que son bus arrivera dans moins de 10 minutes.
Soit X son temps d'attente (en minutes).
La variable aléatoire X est continue car elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels de l'intervalle $[0 ; 10[$.
Par exemple, X = 1,3 signifie que le bus arrive au bout de 1 minute et 18 secondes (car 1,3 min = 1 min 18 s

Définition

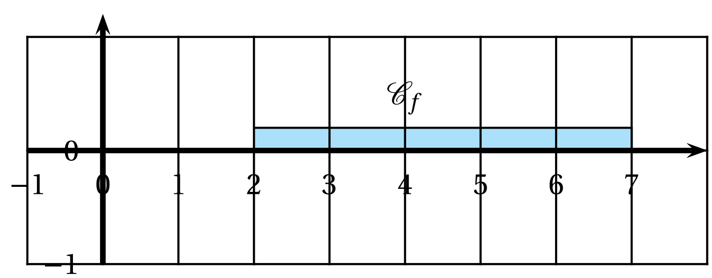
Soit X une variable aléatoire continue..
On dit que X est de densité f lorsque :

- Il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, positive et continue sur un intervalle I appelé support de f et nulle en dehors de I, telle que l'aire totale sous la courbe représentative de f est égale à 1.
- pour tout intervalle $[a\ ;\ b]$ inclus dans I : $P(a\ ;\ X\ ;\ b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

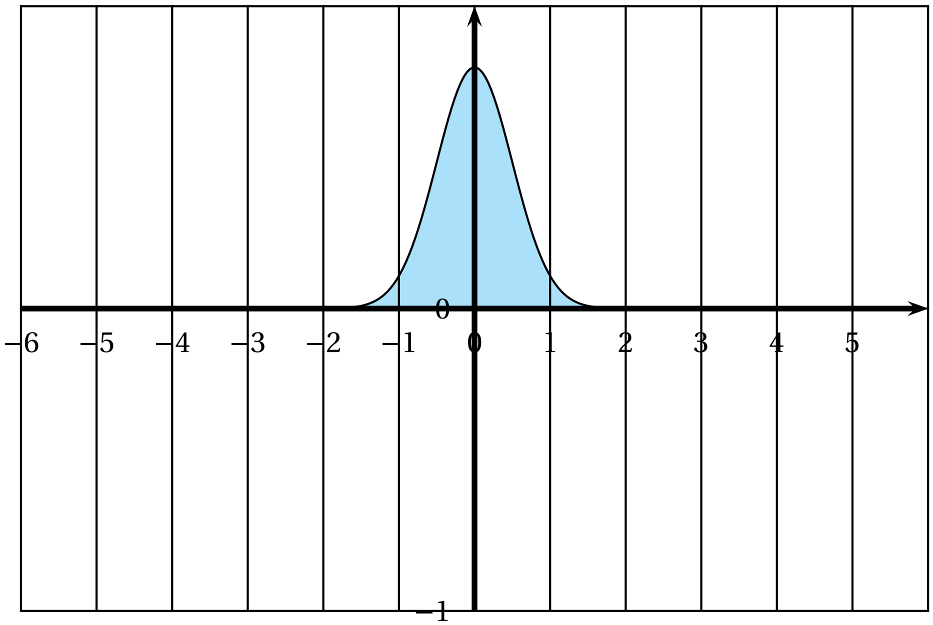
Exemples :

- $f(x) = \dfrac{1}{5}$ sur $[2\ ;\ 7]$ et 0 ailleurs.

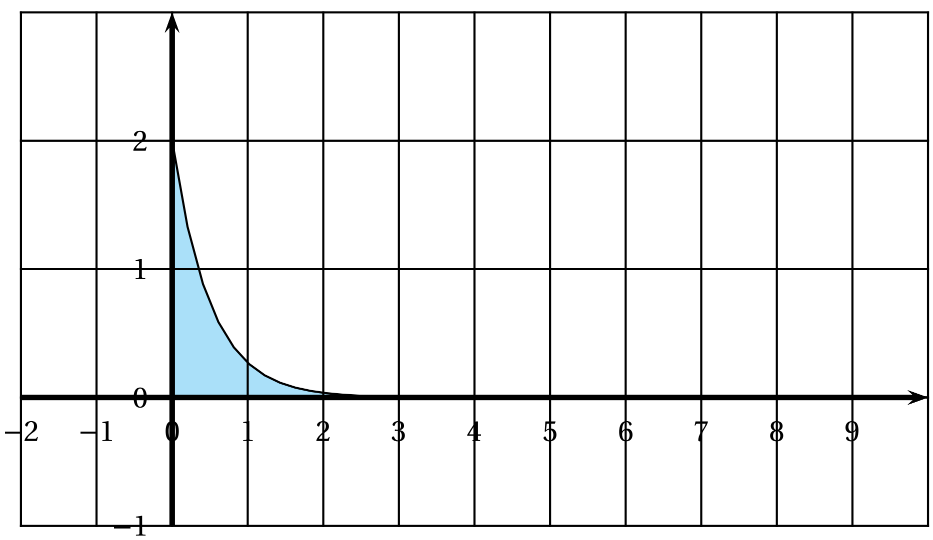
  L'aire en bleu vaut $5 \times \dfrac{1}{5} = 1$



- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}$ (fonction de Gauss)



- $f(x) = \begin{cases} 0 \text{si } x < 0 \\ 2\mathrm{e}^{-2x} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$



Définition

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle I.
X suit la loi de densité f si pour tout intervalle J inclus dans I, $p(X \in J)$ est l'aire du domaine D, où $D = M(x; y)/x \in J$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$ (D est le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses pour x dans $\left(O\,;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$).

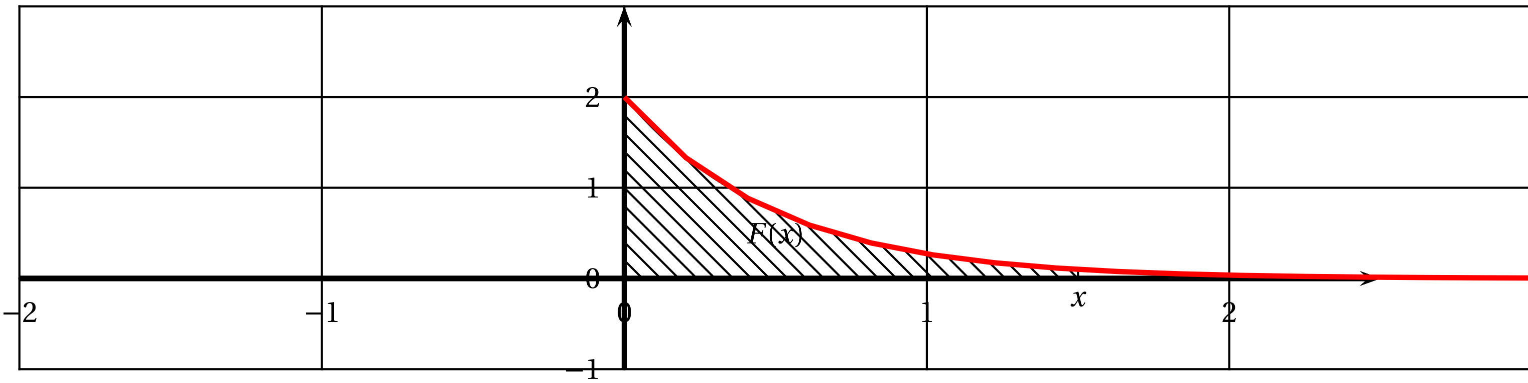
Traduction : $p(a \leqslant X \leqslant b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque : $p(X = a) = 0$ car $p(X = a) = \displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

I.2 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire de densité f.
On appelle fonction de répartition de X la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$



Propriété

On en déduit : $p(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

II Paramètres d'une variable à densité

II.1 Espérance

Définition

L' espérance d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ et de densité f est définie par l'égalité :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x.$$

Rappel : l'espérance $E(X)$ correspond à la notion der **moyenne**.

II.2 Variance et et écart-type

Définition

La variance d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est définie par l'égalité

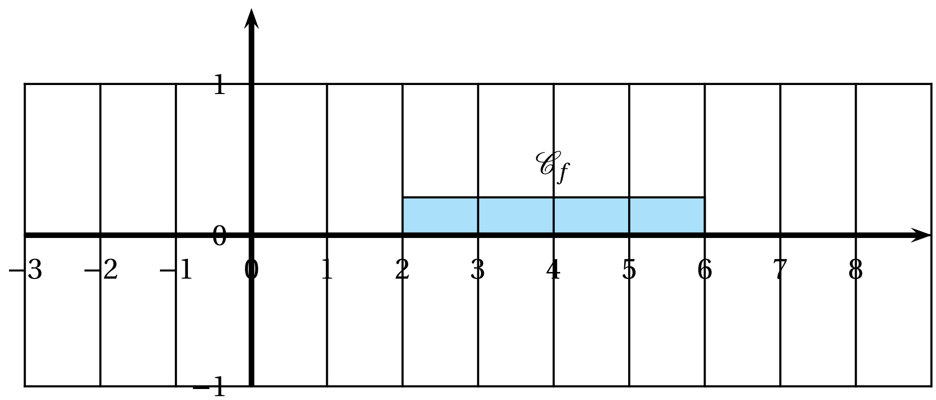
$$V(X) = \int_a^b x^2 f(x)\ \mathrm{d}x - [E(X)]^2.$$

III Loi uniforme sur $[a\,;\,b]$

Définition

Soient a et b deux réels avec $a < b$.
La variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a\,;\,b]$ si elle admet une densité f définie sur $\mathbb{R}$ par :

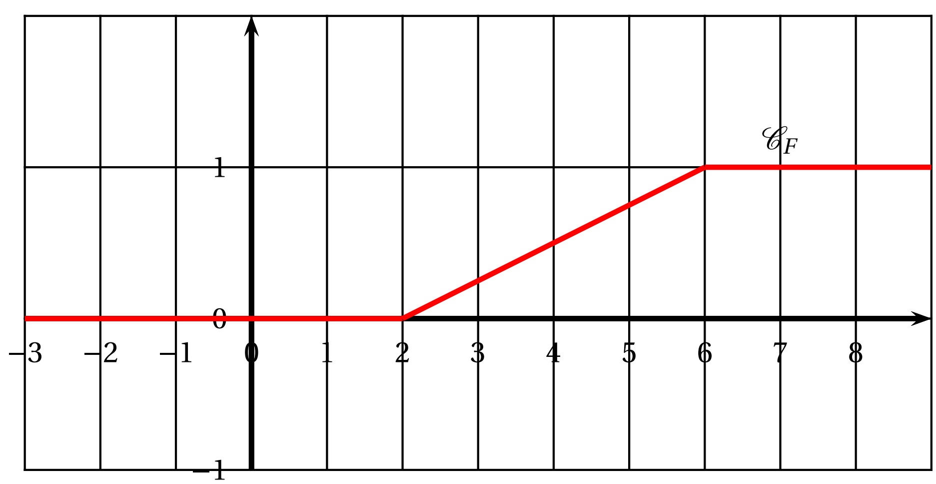
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ sur } [a\,;\,b] \\ 0 \text{ si } x \notin [a\,;\,b] \end{cases}$$



Propriété

Si X est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans l'intervalle $[a;b]$, alors, sa fonction de répartition F est définie, pour tout x dans $[a\,;\,b]$ par :

$$F(X) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 \text{ si } x > b \end{cases}$$



Propriété

Si X est une variable aléatoire uniforme à valeurs dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout intervalle $[c\ ;\ d]$ inclus dans $[a\ ;\ b]$, on a :

$$p(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

Propriété

Si X suit une loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$, alors :

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exemple : Sur une autoroute, deux postes consécutifs de téléphone de secours A et B sont distants de 5 km.
On note X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tombant en panne entre A et B, associe la distance en km parcourue depuis le poste A.
On suppose que la probabilité de tomber en panne entre A et B est indépendante de la position du véhicule au moment de la panne.

a) On en déduit que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
La fonction densité est donc définie par $f(x) = \dfrac{1}{5}$ sur $[0\ ;\ 5]$ et 0 ailleurs.

b) On a par exemple : $p(0 \leqslant X \leqslant 1) = \dfrac{1-0}{5-0} = \dfrac{1}{5}$
$p(3 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{5-3}{5-0} = \dfrac{2}{5}$

c) $E(X) = \dfrac{5+0}{2} = 2,5$km.
Pour un très Gran nombre de véhicules tombant en panne entre ces deux bornes, la distance moyenne parcourue depuis le poste A est 2,5km

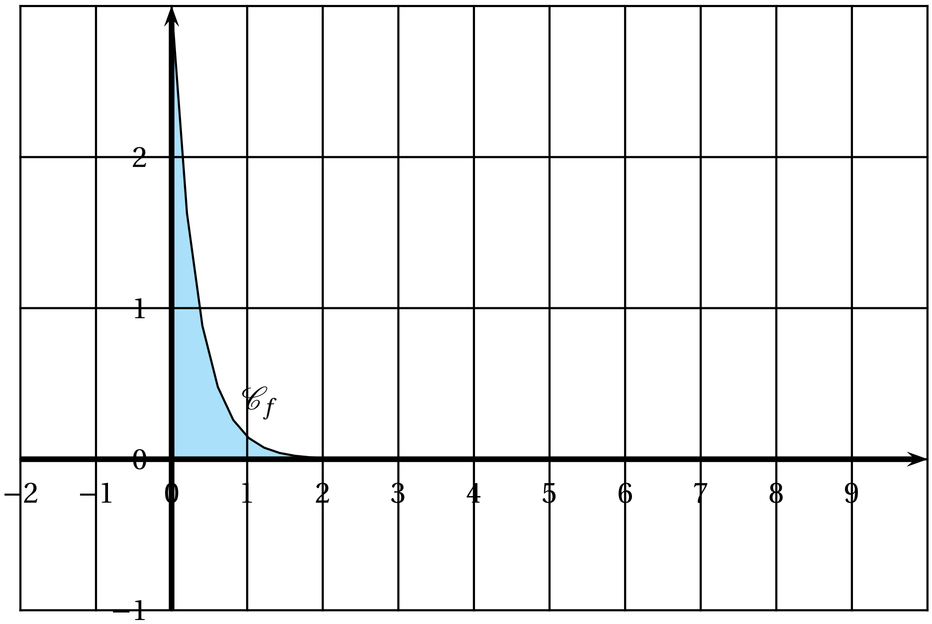
d) La variance est $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{25}{12}$.
L'écart-type est alors $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\dfrac{25}{12}} = \dfrac{5}{\sqrt{12}} = \dfrac{5}{2\sqrt{3}}$.

IV Loi exponentielle

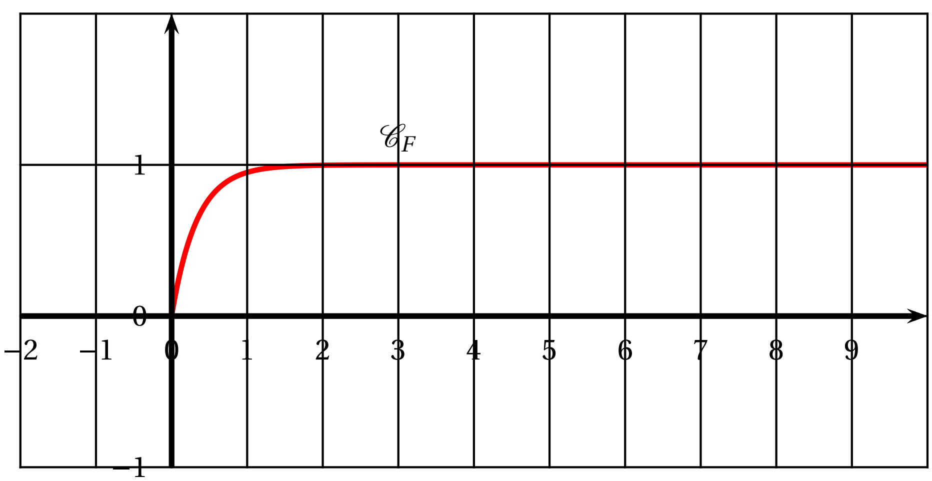
Définition

Soit λ un réel strictement positif.
La variable aléatoire continue X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ si elle admet une densité f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e \mathrm{e}^{-\lambda x}$$



La fonction de répartition est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ pour } x \geqslant 0 \end{cases}$



Propriété

- Pour $0 \leqslant c \leqslant d$, $p(c \leqslant X \leqslant d) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$
- $p(X \geqslant c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$

Propriétés

$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

Propriété « d'absence de mémoire »

Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ , alors :
pour tous réels positifs x et x', $p_{X>x}(X > x + x') = p(X > x')$.
On dit que le temps d'attente ne dépend pas du temps d'attente « passé ».

Exemple :
L'entreprise Duflan produit des appareils dont la durée de vie X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
La durée de vie moyenne de ces appareils est de 15 mois.

1. Quelle est la valeur de λ ?
   Donner la fonction de densité f de X.
2. Calculer la probabilité qu'un appareil vive plus de 2 ans.
3. Monsieur Benet possède un appareil qui n'a jamais eu de panne depuis 2 ans.
   A l'aide des formules sur les probabillités conditionnelles, calculer la probabilité que l'appareil fonctionne encore pendant 3 ans.
   Vérifier la propriété d'absence de mémoire.

Solution :

1. $E(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 15$ donc $\lambda = \dfrac{1}{15}$
   Alors, la densité est $f(x) = \dfrac{1}{15}\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}x}$ pour $x \geqslant 0$, 0 sinon.
2. $p(X \geqslant 24) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{15}\times 24} = \mathrm{e}^{-\frac{8}{15}} \approx \boxed{0,202}$
3. $p_{24\leqslant X}(24+36 \leqslant X) = \dfrac{p(24+36 \leqslant X) \cap (24 \leqslant X)}{p(24 \leqslant X)} = \dfrac{p(24+36 \leqslant X)}{p(24 \leqslant X)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}(24+36)}}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{15}\times 24}} = -\dfrac{1}{15} \times 36 \approx 0,091$