Fonction logarithme népérien

Table des matières

I Définition

Définition

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\,;\,+\infty$. (Les images sont strictement ositives).
Pour tout réel y de $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = y$ admet une solution unique x appartenant à $\mathbb{R}$.
Cette solution est appelée logarithme népérien de $y$et se note $x = \ln(y)$ ou $\ln y$.
La fonction exponentielle admet donc une fonction réciproque définie sur $]0\,;\,+\infty[$.
Cette fonction s'appelle logarithme népérien et se note ln.
Ainsi :

$$\begin{array}{rccc} \ln & : &]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Propriétés

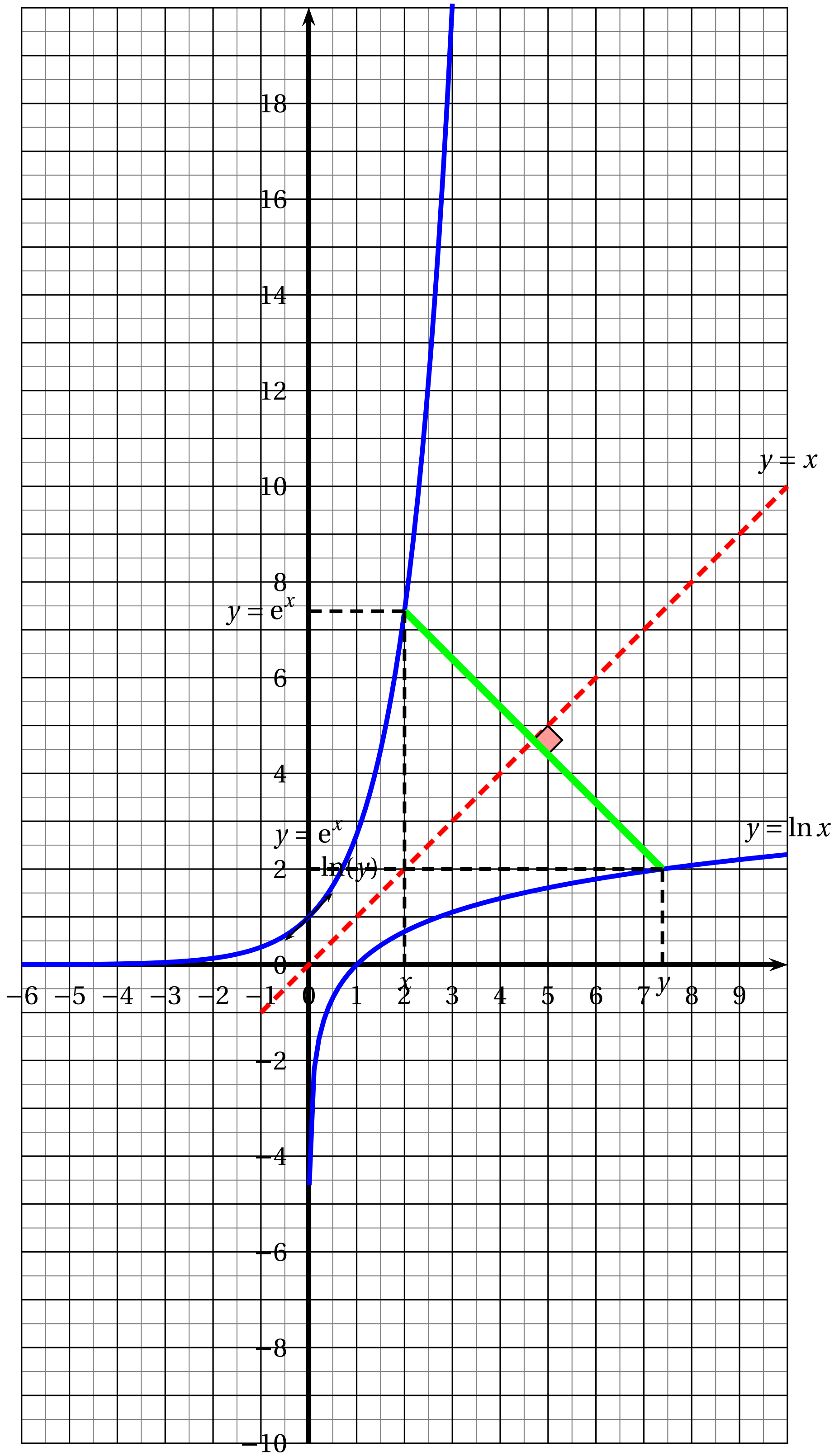
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$

En effet :

- $\mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}) = 1$

II Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



III Propriétés

Propriétés algébriques (admises)

- Poour tout réel $y>0$ et tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- Pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\| n(x)} = x$
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$

Exemple 1 Résoudre les équations

(a) $\mathrm{e}^x = 3$

(b) $\mathrm{e}^x = 7$

Réponses :

(a) $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln(3)}$

(b) $\mathrm{e}^x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln(7)}$

Exemple 2 Résoudre les équations :

(a) $\ln(x) = 6$

(b) $\ln(x) = 0$

Réponses :

(a) $\ln(x) = 6 \Leftrightarrow \boxed{x = \mathrm{e}^6}$

(b) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \mathrm{e}^{0=1}}$

Exemple 3 Résoudre l'équation $\ln(3x-5) = 7$

- Il faut que $3x-5>0$ donc on doit avoir $x > \dfrac{3}{5}$.
- Pour $x > \dfrac{3}{5}$, $\ln(3x-5) = 7 \Leftrightarrow 3x-5 = \mathrm{e}^7 \Leftrightarrow 3x = 5+\mathrm{e}^7 \Leftrightarrow x = \dfrac{5+\mathrm{e}^7}{3} > \dfrac{3}{5}$.

  On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{5+\mathrm{e}^7}{3}\right\}}$

Propriétés fonctionnelles (admises)

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.
- Pour tout entier naturel n, $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

Exemples :

1. Simplifier $\ln(27)-4\ln(3)$.
   $\ln(27)-4\ln(3)=\ln\left(3^3\right)-4\ln(3)$
   $=3\ln(3)-4\ln(3)=\boxed{-\ln(3)=\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$.
2. Simplifier $\ln(8)+\ln\left(\sqrt{2}\right)-\ln(32)$.
   $\ln(8)+\ln\left(\sqrt{2}\right)-\ln(32)=\ln\left(2^3\right)+\frac{1}{2}\ln(2)-\ln\left(2^5\right)=3\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(2)-5\ln(2)=\left(3+\frac{1}{2}-5\right)\ln(2)$
   $=\boxed{-\frac{3}{2}\ln(2)}$

IV Étude de la fonction logarithme

IV.1 Sens de variation

Propriété admise

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x>0$, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$

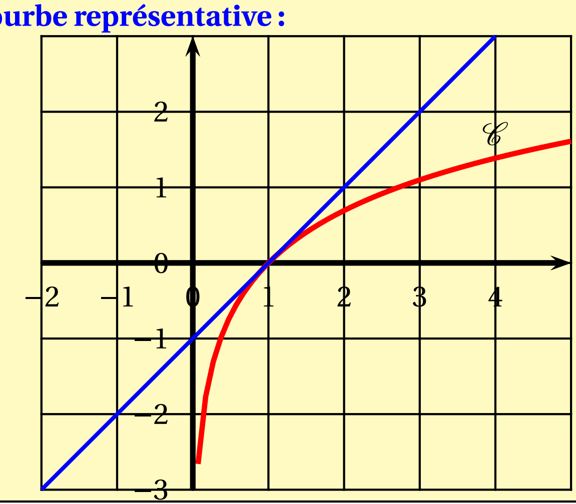
Propriété

$\ln'(x)>0$ donc ln est croissante.

Tableau de variation :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	$+$
$\ln(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Courbe représentative :



Remarque : la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation $y=x-1$, donc passe par le point de coordonnées $(-1,0)$.

Remarque : la fonction ln est croissante, mais croît « lentement ».
Exemple : $\ln\left(10^9\right)=9\ln(10)\approx 20,7$

En utilisant les variations de la fonction. ln, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant 1$
- $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 1$
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$

IV.2 Limites

Propriétés admises

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

IV.3 Dérivée du logarithme d'une fonction

Propriété (admise)

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

$\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple : soit $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$.

$f = \ln(u)$ abvec $u(x) = x^2+5$ et $u'(x) = 2x$.

$f' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}}$