Équations différentielles et primitives d'une fonction

Table des matières

I Équations différentielles

I.1 Généralités

Définition

Une équation ndifférentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction**.
L'égalité que forme cette équation différentielle se présente comme une relation entre la fonction inconnue, sa dérivée, une ou plusieurs dérivées d'ordres différents et éventuellement une autre fonction.
La fonction inconnu est souvent appelée y.

Exemples :

a) $y' - 4y = 2x - 1$ est une équation différentielle.

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ est une équation différentielle.

Définition

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver toutes les fonctions vérifiant cette équation.

Remarque : on ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles …

I.2 Équation différentielle de la forme $y' = f$

Définition

Spoit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f toute fonction dérivable sur I solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Exemple :

Soit lréqsuation différentielle $y' = 2x + 3$.
La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + 3x$ est une solution de cette équation différentielle.
On dit que F est une **primitive** de la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$.

Remarque : g définie par $g(x) = x^2 + 3x + 7$ est aussi une solution. Il n'y a donc pas unicité d'une primitive.

Théorème admis

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives définies sur I.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f.

- Pour tout réel k, $F + k$ est aussi une primitive de f.
- Si G est une primitive de f sur I, il existe k tel que $G = F + k$.

Remarque : il suffit donc de connaître une primitive pour les avoir toutes ; ill suffit d'ajouter une constante quelconque.

Propriété admise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Quels que soient les réels $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant $F(x_0) = y_0$.