

Dérivation

Table des matières

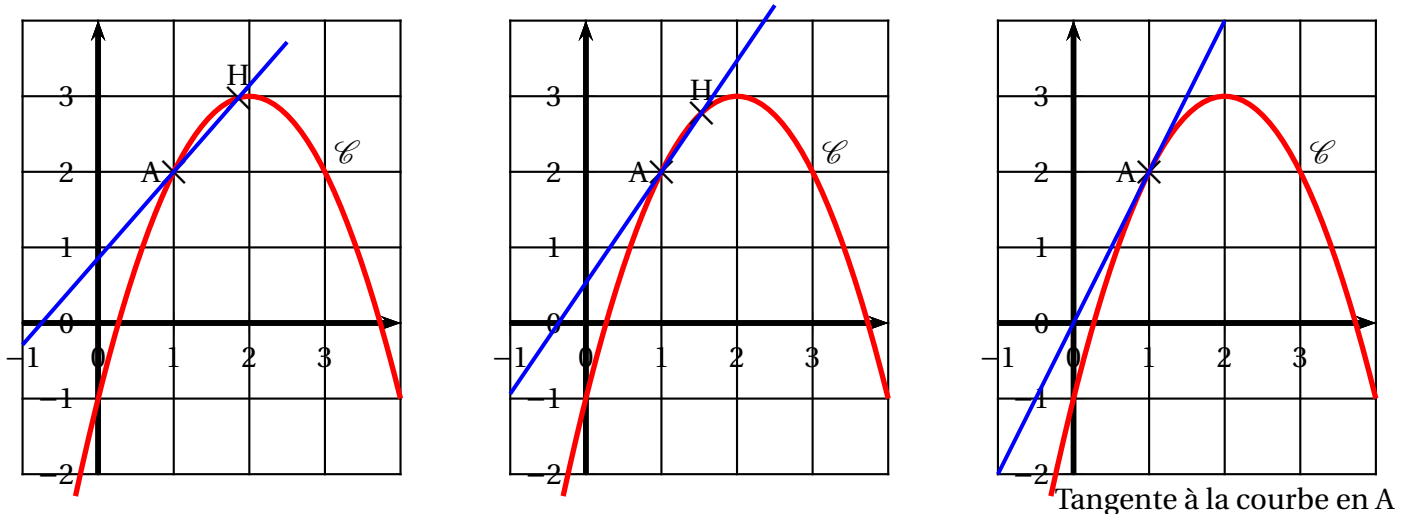
I	Nombre dérivé, tangente à une courbe	1
II	Équation de la tangente	2
III	Dérivée d'une fonction	3
III.1	Dérivée des fonctions usuelles	3
III.2	Dérivée et opérations	4
IV	Dérivée et variation d'une fonction	5

I Nombre dérivé, tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a + h$ appartient à I .

Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a et H le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a + h$.

Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche de A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ se rapproche (dans certains cas) d'une « droite limite ».



Définition

Si le quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite qui est un nombre réel quand h tend vers 0, on appelle $f'(a)$ ce nombre limite qu'on appelle nombre dérivé de f en a .

On dit que f est dérivable en a . On écrit $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a est la droite qui passe par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} .

Soit $a = 3$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h.$$

Lorsque h tend vers 0, $6+h$ tend vers 6.

f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.

Remarque : il existe des fonctions n'admettant pas de nombre dérivé.

Exemple : soit f la fonction valeur absolue $x : x \mapsto |x|$.

Rappel : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

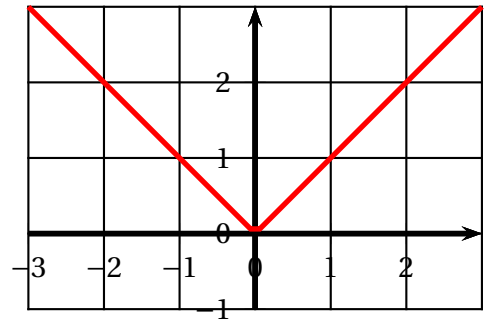
Étudions si f a un nombre dérivé en 0.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

- Si $h > 0$, $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|h|}{h} = 1$.
- Si $h < 0$, $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|h|}{h} = -1$.

L'expression n'a donc **pas de limite** en 0, la courbe représentative de f n'a pas de tangente en 0.

Remarque : cette expression a une limite à gauche et une limite à droite, on dit que la courbe admet deux demi-tangentes.



Courbe représentative de $x \mapsto |x|$

II Équation de la tangente

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.

On suppose que f est dérivable en a , donc que f admet un nombre dérivé $f'(a)$ en a .

Alors l'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc l'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$.

Calcul de p : par définition, la tangente passe par le point $A(a; f(a))$.

Par conséquent : $f(a) = f'(a)a + p$ d'où $p = f(a) - f'(a)a$.

Alors : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 3$. On a trouvé précédemment $f'(3) = 6$.

L'équation de la tangente à \mathcal{C} en 3 est : $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$ donc $y = 6(x - 3) + 9$ d'où $y = 6x - 9$

III Dérivée d'une fonction



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On suppose que f admet un nombre dérivé $f'(x)$ pour tout x de I .

On appelle fonction dérivée de f , notée f' , la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$.

III.1 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$f(x) = k$ constante réelle	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$ (n entier, $n \geq 2$)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, n entier, $n \geq 2$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$ sur \mathbb{R}	$f'(x) = e^x$	\mathbb{R}

Exemples :

- $f(x) = 3$; $f'(x) = 0$

- $f(x) = x^5$; $f'(x) = x^n$ avec $n = 5$.

Alors : $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$

- $f(x) = \frac{1}{x^7}$; $f(x) = \frac{1}{x^n}$ avec $n = 7$.

Alors : $f'(x) = -\frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x^{7+1}} = -\frac{1}{x^8}$

III.2 Dérivée et opérations

Soient k un réel et u et v deux fonction dérivables sur in intervalle I .

Fonction	Dérivée
(ku)	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u} (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v} (v \neq 0)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exemples :

- $f(x) = 5x^3$; $f = ku$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.

Alors : $f' = (ku)' = ku'$ avec $u'(x) = 3x^2$ d'où : $f'(x) = 5 \times 3x^2 = \boxed{15x^2}$.

- $f(x) = 3x^2 + 5x$.

$f = u + v$ avec $u(x) = 3x^2$ et $v(x) = 5x$.

$f' = (u + v)' = u' + v'$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$ et $v'(x) = 5$.

Par conséquent : $\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + 5}$

- $f(x) = 5x^2 (7x^2 + 5x + 1)$.

$f = uv$ avec $u(x) = 5x^2$ et $v(x) = 7x^2 + 5x + 1$.

On a alors : $f' = (uv)' = u'v + uv'$.

$u(x) = 5 \times x^2$ donc $u'(x) = 5 \times 2x = 10x$

v est une somme de fonctions, donc $v'(x) = 7 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 14x + 5$.

Alors : $f'(x) = 10x \times (7x^2 + 5x + 1) + 5x^2 \times (14x + 5) = 70x^3 + 50x^2 + 10x + 70x^3 + 25x^2 = \boxed{140x^3 + 75x^2 + 10x}$

- $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$ sur $]0 ; +\infty[$

$$f = uv \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$f' = (uv)' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x + 5)}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{9x + 5}{2\sqrt{x}}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{7x+5}{2x+3} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}.$$

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 7x+5 \\ v(x) = 2x+3 \end{cases}.$$

$$f' = \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 7 \\ v'(x) = 2 \end{cases}.$$

$$f'(x) = \frac{7(2x+3) - 2(7x+5)}{(2x+3)^2} = \boxed{\frac{11}{(2x+3)^2}}$$

IV Dérivée et variation d'une fonction



Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} .

- Si, pour tout x de I , $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .