

# Dérivation

## Table des matières

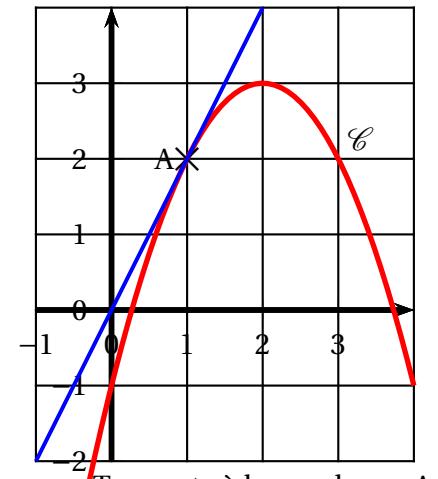
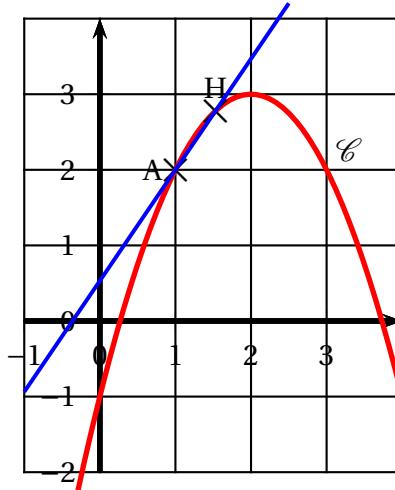
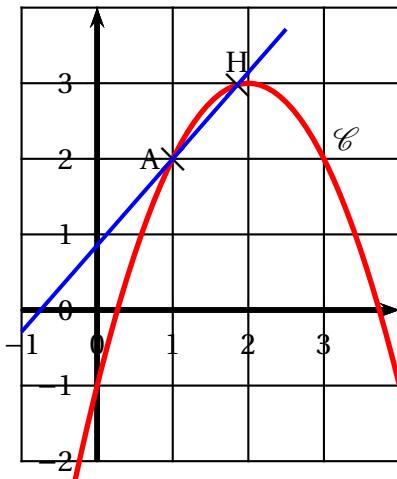
I	Nombre dérivé, tangente à une courbe . . . . .	1
II	Équation de la tangente . . . . .	2
III	Dérivée d'une fonction . . . . .	3
III.1	Dérivée des fonctions usuelles . . . . .	3
III.2	Dérivée et opérations . . . . .	4
IV	Dérivée et variation d'une fonction . . . . .	5

## I Nombre dérivé, tangente à une courbe

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ,  $a$  un nombre appartenant à  $I$  et  $h$  un nombre réel non nul tel que  $a + h$  appartient à  $I$ .

Soit  $A$  le point de la courbe représentative de  $f$  d'abscisse  $a$  et  $H$  le point de la courbe représentative de  $f$  d'abscisse  $a + h$ .

Lorsque  $h$  tend vers 0, le point  $H$  se rapproche de  $A$  et la sécante ( $AH$ ) de coefficient directeur  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  se rapproche (dans certains cas) d'une « droite limite ».



Tangente à la courbe en A



## Définition

Si le quotient  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  a une limite qui est un nombre réel quand  $h$  tend vers 0, on appelle  $f'(a)$  ce nombre limite qu'on appelle nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .  
 On dit que  $f$  est dérivable en  $a$ . On écrit  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .  
 La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$  est la droite qui passe par  $A(a ; f(a))$  et de coefficient directeur  $f'(a)$ .

**Exemple :** soit  $f : x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $a = 3$ .

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h.$$

Lorsque  $h$  tend vers 0,  $6 + h$  tend vers 6.

$f$  est dérivable en 3 et  $f'(3) = 6$ .

**Remarque :** il existe des fonctions n'admettant pas de nombre dérivé.

Exemple : soit  $f$  la fonction valeur absolue  $x : x \mapsto |x|$ .

**Rappel :**  $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ .

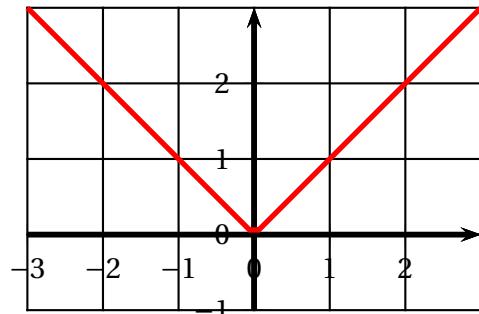
Étudions si  $f$  a un nombre dérivé en 0.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

- Si  $h > 0$ ,  $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$  donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{|h|}{h} = -1$ .
- Si  $h < 0$ ,  $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$   $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{|h|}{h} = 1$

L'expression n'a donc **pas de limite** en 0, la courbe représentative de  $f$  n'a pas de tangente en 0.

**Remarque :** cette expression a une limite à gauche et une limite à droite, on dit que la courbe admet deux demi-tangentes.



Courbe représentative de  $x \mapsto |x|$

## II Équation de la tangente



### Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $a \in I$ .

On suppose que  $f$  est dérivable en  $a$ , donc que  $f$  admet un nombre dérivé  $f'(a)$  en  $a$ .

Alors l'équation de la tangente en  $a$  est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

**Démonstration :**  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente, donc l'équation de cette tangente est de la forme  $y = f'(a)x + p$ .

Calcul de  $p$  : par définition, la tangente passe par le point  $A(a ; f(a))$ .

Par conséquent :  $f(a) = f'(a)a + p$  d'où  $p = f(a) - f'(a)a$ .

Alors :  $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Exemple :  $f(x) = x^2$  et  $a = 3$ . On a trouvé précédemment  $f'(3) = 6$ .

L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  en 3 est :  $y = f'(3)(x - 3) + f(3)$  donc  $y = 6(x - 3) + 9$  d'où  $y = 6x - 9$

### III Dérivée d'une fonction



#### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

On suppose que  $f$  admet un nombre dérivé  $f'(x)$  pour tout  $x$  de  $I$ .

On appelle fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , la fonction  $f' : x \mapsto f'(x)$ .

#### III.1 Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Fonction dérivée	Domaine de dérivation
$f(x) = k$ constante réelle	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ ( $n$ entier, $n \geq 2$ )	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ , $n$ entier, $n \geq 2$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$ ( $x \geq 0$ )	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

#### Exemples :

- $f(x) = 3$ ;  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^5$ ;  $f(x) = x^n$  avec  $n = 5$ .  
Alors :  $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$
- $f(x) = \frac{1}{x^7}$ ;  $f(x) = \frac{1}{x^n}$  avec  $n = 7$ .  
Alors :  $f'(x) = -\frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{1}{x^{7+1}} = -\frac{1}{x^8}$

### III.2 Dérivée et opérations

Soient  $k$  un réel et  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur l'intervalle  $I$ .

Fonction	Dérivée
$(ku)$	$ku'$
$u + v$	$u' + v'$
$uv$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u} (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v} (v \neq 0)$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

#### Exemples :

- $f(x) = 5x^3$ ;  $f = ku$  avec  $k = 5$  et  $u(x) = x^3$ .

Alors :  $f' = (ku)' = ku'$  avec  $u'(x) = 3x^2$  d'où :  $f'(x) = 5 \times 3x^2 = \boxed{15x^2}$ .

- $f(x) = 3x^2 + 5x$ .

$f = u + v$  avec  $u(x) = 3x^2$  et  $v(x) = 5x$ .

$f' = (u + v)' = u' + v'$  avec  $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$  et  $v'(x) = 5$ .

Par conséquent :  $f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + 5$

- $f(x) = 5x^2(7x^2 + 5x + 1)$ .

$f = uv$  avec  $u(x) = 5x^2$  et  $v(x) = 7x^2 + 5x + 1$ .

On a alors :  $f' = (uv)' = u'v + uv'$ .

$u(x) = 5 \times x^2$  donc  $u'(x) = 5 \times 2x = 10x$

$v$  est une somme de fonctions, donc  $v'(x) = 7 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 14x + 5$ .

Alors :  $f'(x) = 10x \times (7x^2 + 5x + 1) + 5x^2 \times (14x + 5) = 70x^3 + 50x^2 + 10x + 70x^3 + 25x^2 = \boxed{140x^3 + 75x^2 + 10x}$

- $f(x) = (3x + 5)\sqrt{x}$  sur  $]0; +\infty[$

$$f = uv \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$$f' = (uv)' = u'v + uv' \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x + 5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x + 5)}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{9x + 5}{2\sqrt{x}}}$$

- $f(x) = \frac{7x+5}{2x+3}$  sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ .

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } \begin{cases} u(x) = 7x + 5 \\ v(x) = 2x + 3 \end{cases} .$$

$$f' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \text{ avec } \begin{cases} u'(x) = 7 \\ v'(x) = 2 \end{cases} .$$

$$f'(x) = \frac{7(2x+3) - 2(7x+5)}{(2x+3)^2} = \boxed{\frac{11}{(2x+3)^2}}$$

## IV Dérivée et variation d'une fonction



### Théorème (admis)

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

- Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) > 0$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) < 0$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ , alors  $f$  est constante sur  $I$ .