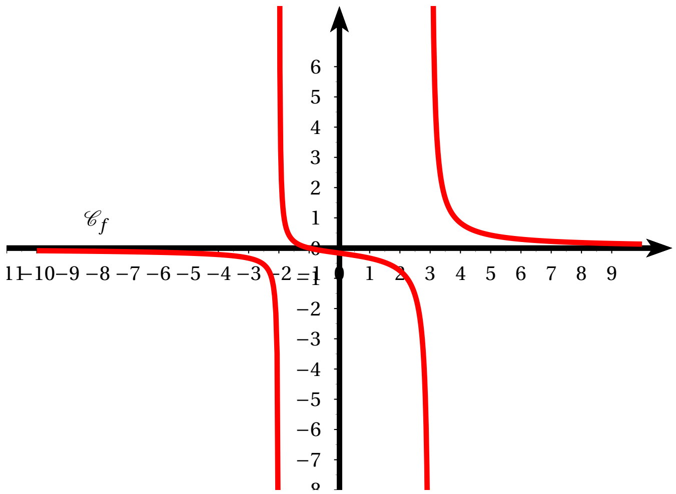
# Correction de la feuille d'exercices n° 3

## Exercice I

Voici la courbe représentative d'une fonction.



On conjecture

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

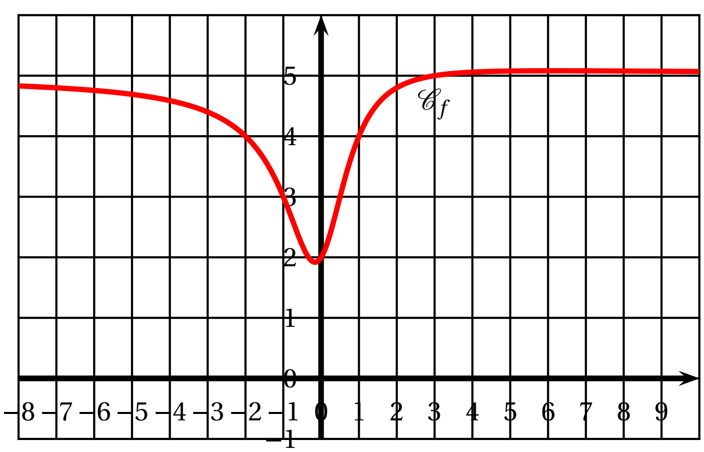
e) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$

**Remarque** : $f(x) = \dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)}$

## Exercice II

On considere la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1}$, où $a$, $b$ et $c$ sont trois réels.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. (a) On a une forme indéterminée.

$$f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(a + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{a + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(a + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.

Alors : $\boxed{\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a}$.

(b) D'après le graphique, on trouve que $\boxed{a=5}$.

2. • $f(0)=c$ et graphiquement, on voit que $f(0)=2$ donc $\boxed{c=2}$.

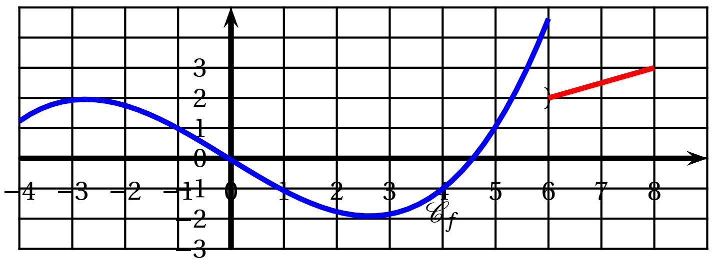
   • On en déduit $f(x)=\dfrac{5x^2+bx+2}{x^2+1}$.

   $f(1)=4 \Leftrightarrow \dfrac{7+b}{2}=4$ d'où $6+b=8$ d'où $\boxed{b=1}$

   • On en déduit $\boxed{f(x)=\dfrac{5x^2+x+2}{x^2+1}}$.

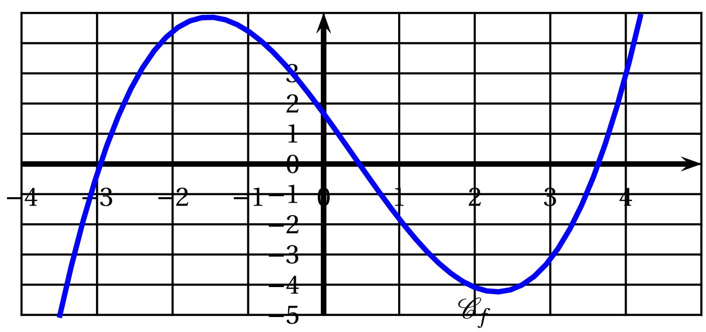
## Exercice III

Voici la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ :




Cette fonction n'est pas continue ; il y a un saut en 6.

## Exercice IV



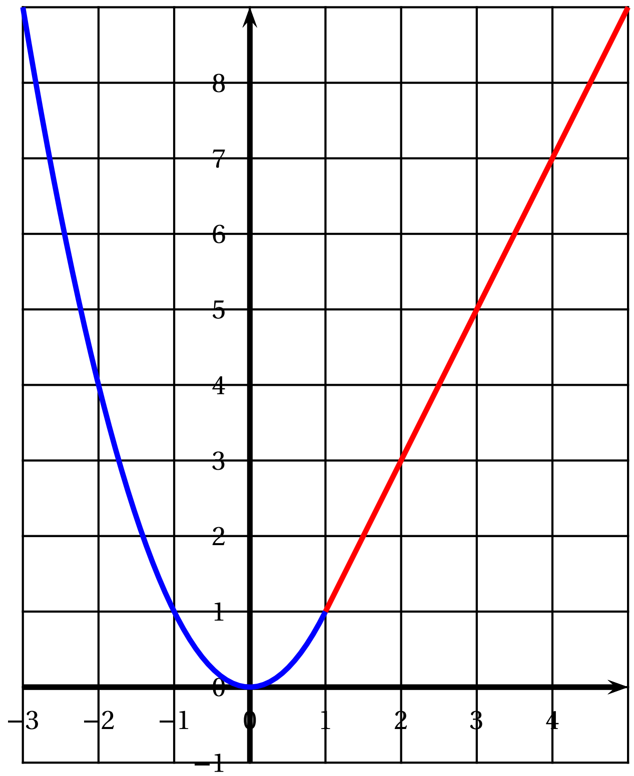

Cette fonction est continue.

## Exercice V

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 \text{ si } x\leqslant 1\\ x^2 \text{ si } >1\end{cases}.$$

1. Représentation graphique :




2. • $f$ est continue sur $]-\infty\,;\,1[$ (fonction usuelle)
   • $f$ est continue sur $]1\,;\,+\infty[$ (fonction usuelle)
   • Étude en 1 : $f(1) = 1^1 = 1$.
   $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (2x-1) = 1 = f(1)$ donc $f$ est continue en 1.

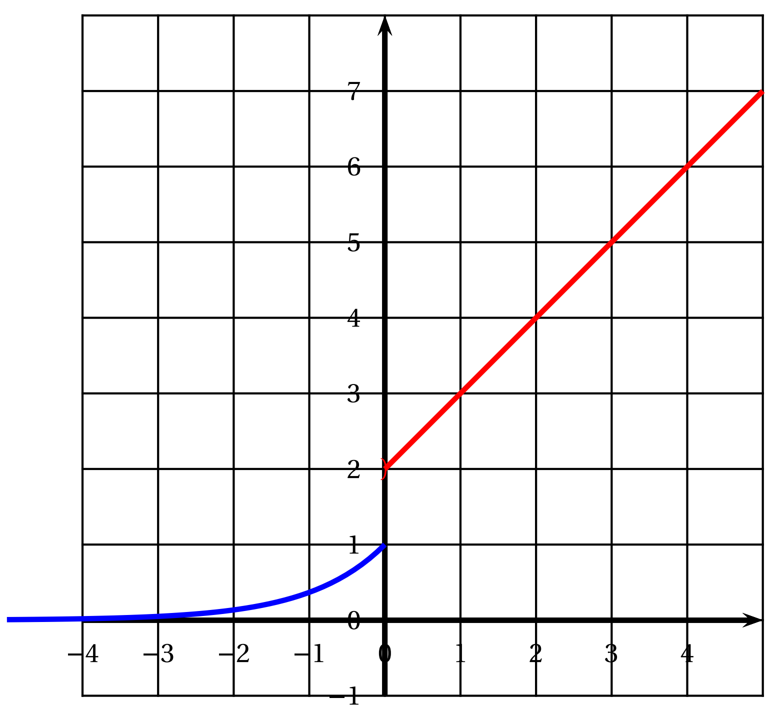
   Donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## Exercice VI

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x \text{ si } x \leqslant 0 \\ x+2 \text{ si } > 0 \end{cases}.$$

1. Représention graphique :



2. Cette fonction n'est pas continue en 0.
   En effet : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 2$ ; or $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

## Exercice VII

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 \text{ si } x \leqslant 3 \\ m \text{ si } > 3 \end{cases} .$$

1. Il est clair que le problème de continuité se pose en $x = 3$.
   Pour que $f$ soit continue en 3, il faut que $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = m$ ; or $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x>3}} f(x) = 6$.

   On doit avoir $\boxed{m = 6}$

2.