Feuille d'exercices sur les limites de fonctions (2)

Exercice I

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{2-x^2}{x^2+1}$.

Pour que la courbe $\mathscr{C}_g$ admette une asymptote, il faut que $g(x)$ ait une limite finie à l'infini ou que $g(x)$ ait une valeur interdite et que la limite en cette valeur soit infinie.

- g est définie sur $\mathbb{R}$.
- Limite à l'infini : on a une forme indéterminée.

  $g(x)=\dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{\cancel{x^2}}\right)}=\dfrac{\frac{2}{x^2}-1}{1+\frac{1}{x^2}}$.

  $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2}-1\right)=-1$ et $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$.

  Par quotient : $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=-1$.

  La droite d'équation $y=-1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$.

Exercice II

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions définies par les expressions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1-x}$.

On a une forme indéterminée pour le calcul de la limite à l'infini.

$f(x)=\dfrac{\cancel{x^2}\left[1+\frac{2}{x^2}\right]}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}=x\times\dfrac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)=1$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-1$.

  Par produit et quotient : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty}$.
- De même : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$ car la limite est celle de $-x$. (Voir calculs précédents)

b) $g(x)=\dfrac{x+3}{-2x^2+1}$.

On a une forme indéterminée.

$\dfrac{x+3}{-2x^2+1}=\dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\frac{3}{x}}{-2+\frac{1}{x^2}}$.

On a :

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(-2+\frac{1}{x}^2\right)=-2$.
- par produit et quotient, $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)=0}$

Pour la limite en $+\infty$, on a la même réponse : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$

On en déduit que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_g$

Exercice III

a) Calcul de : $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{x}{3x-6}$:

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}x=2$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}(3x-6)=0$ avec $3x-6>0$
- Par quotient, on en déduit : $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\left(\frac{x}{3x-6}\right)=+\infty}$

b) Calcul de $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x}{3x-6}$:

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}=2$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}(3x-6)=0$ avec $3x-6<0$
- Par quotient : $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\left(\frac{x}{3x-6}\right)=-\infty}$ (quotient de 2, positif, par un nombre négatif)

c) Calcul de $\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}\frac{x^2}{4-x}$:

- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}x^2=16$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}(4-x)=0$ avec $4-x<0$
- Par conséquent : $\boxed{\displaystyle\lim_{\substack{x\to4\\x>4}}\left(\frac{x^2}{4-x}\right)=-\infty}$

d) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \dfrac{x^2}{4-x}$:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} = 16$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} (4-x) = 0$ avec $4-x>0$
- donc : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \left(\dfrac{x^2}{4-x}\right) = +\infty}$

e) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 4 = 4$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$
- Par somme et différence, on trouve :
  $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}^2\right) = -\infty}$

f) Calcul de $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 4 = 4$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{2}{x^2}\right) = +\infty$
- Par somme et différence, on obtient une forme indéterminée !
- On lève l'indétermination :
  On remarque que $4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2} = 4+\dfrac{x-2}{x^2}$.
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 4 = 4$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (x-2) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 = 0$ avec $x^2>0$.
  On en déduit : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(\dfrac{x-2}{x^2}\right) = -\infty$
  D'où : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(4+\dfrac{x-2}{x^2}\right) = -\infty}$