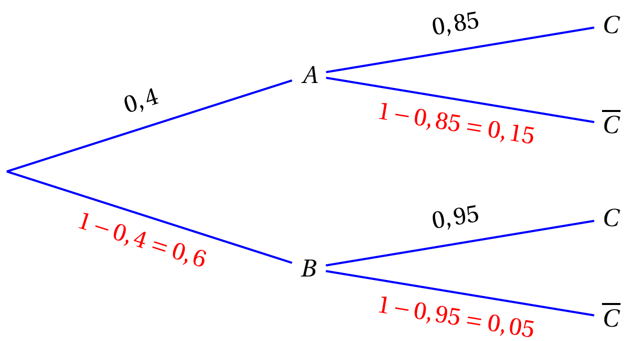
Correction des exercices sur la loi binomiale (2)

Exercice I

PARTIE A

1. On construit un arbre pondéré traduisant la situation :



2. L'événement « la pomme n'est pas commercialisable » est l'événement $\overline{C}$.

   D'après la formule des probabilités totales :
   $P(\overline{C}) = P(\overline{C} \cap A) + P(\overline{C} \cap B)$
   $= P(A) \times P_A(\overline{C}) + P(B) \times P_B(\overline{C})$
   $= 0,4 \times 0,15 + 0,6 \times 0,05 = 0,06 + 0,03 = \boxed{0,09}$

3. Il s'agit, dans cette question, de comparer $P_{\overline{C}}(A)$ et $P_{\overline{C}}(B)$.

   $P_{\overline{C}}(A) = \dfrac{P(A \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \dfrac{0,06}{0,09} = \dfrac{2}{3}$; $P_{\overline{C}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})}$
   $= \dfrac{0,03}{0,09} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$

   Donc le responsable des achats a raison quand il dit qu'une pomme non commercialisable a deux fois plus de chance de provenir du fournisseur A que du fournisseur B.

PARTIE B

On prend au hasard 15 pommes dans le stock. Le stock est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de pommes commercialisables suit la loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 1 - 0,09 = 0,91$.

1. La probabilité que les 15 pommes soient toutes commercialisables est :

   $P(X = 15) = \dbinom{15}{15} 0,91^{15} 0,09^0 \approx \boxed{0,243}$

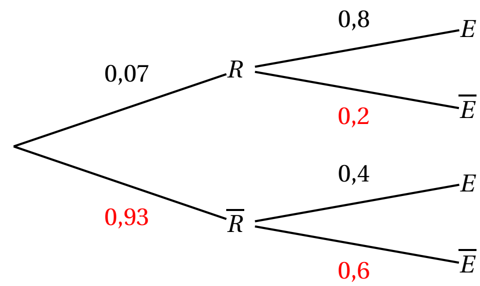
2. La probabilité qu'au moins 14 pommes soient commercialisables est :

   $P(X \geqslant 14) = P(X = 14) + P(X = 15)$
   $= \dbinom{15}{14} 0,91^{14} 0,09^1 + \dbinom{15}{15} 0,91^{15} 0,09^0$
   $\approx 0,3605 + 0,2430 \approx \boxed{0,604}$

Exercice II Amérique du Nord juin 2024

Partie A

1. On dresse l'arbre pondéré de probabilités en utilisant les données de l'énoncé :
   $p(R) = 0,07$; $p_R(E) = 0,8$ et $p_{\overline{R}}(E) = 0,4$:



   On a $p(R \cap E) = p(R) \times p_R(E) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(E) = p(R \cap E) + p\left(\overline{R} \cap E\right)$.

   Or $p\left(\overline{R} \cap E\right) = p\left(\overline{R}\right) \times p_{\overline{R}}(E) = 0,93 \times 0,4 = 0,372$.
   Donc $p(E) = 0,056 + 0,372 = 0,428$.

3. On a $p_E(R) = \dfrac{p(E \cap R)}{p(E)} = \dfrac{p(R \cap E)}{p(E)} = \dfrac{0,056}{0,428} = \dfrac{56}{428}$
   $= \dfrac{14}{107} \approx \boxed{0,1308}$ soit 0,131 au millième près.

Partie B

1. Les évènements étant indépendants et la probabilité d'obtenir un objet rare étant toujours égale à 0,07, la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,\ p)$ avec $n = 30$ et $p = 0,07$.
   L'espérance mathématique est $E = n \times p = 30 \times 0,07$
   $= \boxed{2,1}$.

2. La calculatrice donne $P(X < 6) \approx 0,9838$ soit 0,984 au millième près.

3. Quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $p(X \geqslant k + 1) = 1 - p(X \leqslant k)$. D'après la calculatrice :
   $p(X \geqslant 1 + 1) = 1 - p(X \leqslant 1) \approx 0,631$, et
   $p(X \geqslant 2 + 1) = 1 - p(X \leqslant 2) \approx 0,351$, on a donc $\boxed{k = 2}$.
   Dans le cadre du jeu ceci signifie que la probabilité d'obtenir au moins 2 objets rares est supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

4. Il faut donc trouver X tel que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,95$ ou encore $1 - p(X = 0) \geqslant 0,95 \iff p(X = 0) \leqslant 1 - 0,95$
   $\iff p(X = 0) \leqslant 0,05$.

   Or $p(X = 0) = \dbinom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1 - 0,07)^N = 0,93^N$.

   Il faut donc résoudre l'inéquation :
   $0,93^N \leqslant 0,05 \Rightarrow N \ln 0,93 \leqslant \ln 0,05$ par croissance de la fonction logarithme népérien et enfin $N \geqslant \dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93}$, car $\ln 0,93 < 0$ et son inverse $\dfrac{1}{\ln 0,93}$ aussi.

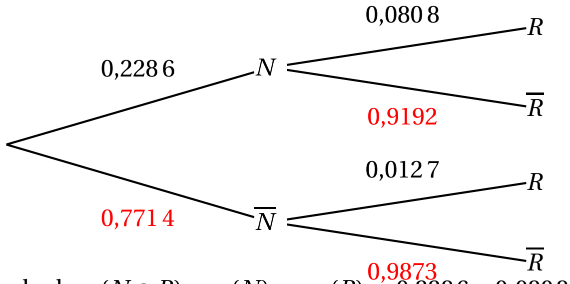
   D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0,05}{\ln 0,93} \approx 41,3$.

   Conclusion Il faut que $N \geqslant 42$.

Exercice III Amérique du Nord juin 2024 (J2)

Partie A

1.



2. On calcule $p(N \cap R) = p(N) \times p_N(R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 = 0{,}018471$ soit $0{,}0185$ à 10^{-4} près.
3. On a de même $p\left(\overline{N} \cap R\right) = p(N) \times p_{\overline{N}}(R) = 0{,}7714 \times 0{,}0127 = 0{,}009797$ soit $0{,}0098$ à 10^{-4} près.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(R) = p(N \cap R) + p\left(\overline{N} \cap R\right) \approx 0{,}0185 + 0{,}0098$
   $p(R) \approx 0{,}0283$.
4. On a $p_R(N) = \dfrac{p(R \cap N)}{p(R)} = \dfrac{p(N \cap R)}{p(R)} \approx \dfrac{0{,}0185}{0{,}0283} \approx 0{,}65371$ soit $0{,}6537$ à 10^{-4} près.

Partie B

1. X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(n = 500,\ p = 0{,}65)$.
2. On calcule $\dbinom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times 0{,}35^{175} \approx 0{,}037384$ soit $0{,}0374$ à 10^{-4} près. (Utiliser la fonction binomiale de la calculatrice si les capacités de calcul de celle-ci sont dépassées).
3. On a $p(X \geqslant 325) = 1 - p(X \leqslant 324)$ soit d'après la calculatrice $0{,}47944$, donc
   $p(X \geqslant 325) \approx 1 - 0{,}4794 = 0{,}5206$ à 10^{-4} près.

Partie C

1. On a $p_n = (1 - 0{,}65)^n = 0{,}35^n$.
2. On a $q_n = 1 - p_n$.
   On cherche donc n tel que $1 - p_n \geqslant 0{,}9999 \iff p_n \leqslant 0{,}0001$, soit par croissance de la fonction logarithme népérien :
   $n \ln 0{,}35 \leqslant \ln 00{,}0001 \iff n \geqslant \dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}35}$ car $\dfrac{1}{\ln 0{,}35} < 0$.
   D'après la calculatrice $\dfrac{\ln 0{,}0001}{\ln 0{,}35} \approx 8{,}8$.
   Il faut prendre au minimum $n = 9$.