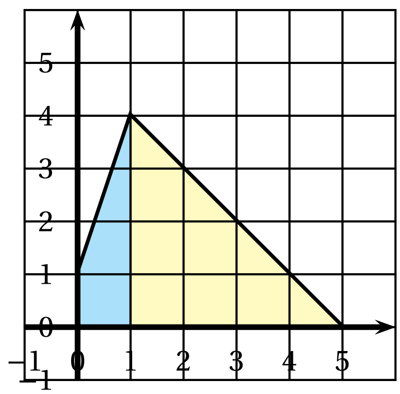
Correction de la feuille d'exercices sur l'intégration

Exercice I

Dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ est représentée ci-dessous :

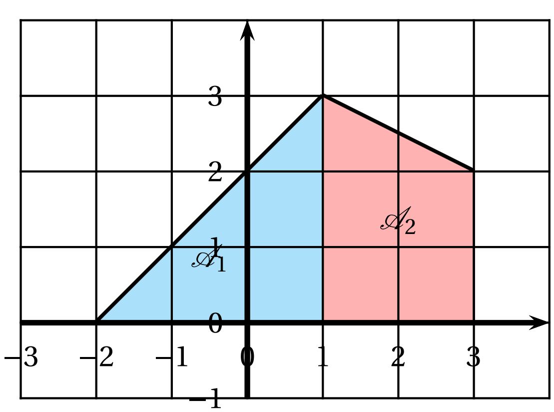


On trace la droite d'équation $x = 1$.
$\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.
C'est la somme de l'aire représentée en bleu et de celle en jaune.
L'aire bleue est l'aire d'un trapèze : elle vaut $\dfrac{(1+4)\times 1}{2} = \dfrac{5}{2}$.
L'aire jaune est l'aire d'un triangle rectangle : elle vaut $\dfrac{4\times 4}{2} = \dfrac{16}{2}(=8)$.
On en déduit : $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2} + \frac{16}{2} = \boxed{\frac{21}{2}}$

Exercice II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$ par : $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ si } -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ -0,5x+3,5 \text{ si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$.

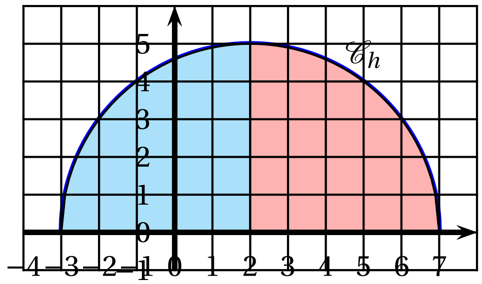
1. Courbe représentative : c'est une fonction affine par morceaux.



2. $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = \frac{3\times 3}{2} + \frac{(3+2)\times 2}{3} = \frac{9}{2} + 5 = \boxed{\frac{19}{2}}$.

Exercice III

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction h définie sur $[-3~;~7]$ est représentée par le demi-cercle ci-dessous.



- $\displaystyle\int_{-3}^{7} h(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire du demi-disque de rayon 5 donc $\displaystyle\int_{-3}^{7} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\times 5^2}{2} = \boxed{\frac{25\pi}{2}}$.
- $\boxed{\displaystyle\int_{2}^{7} h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{25\pi}{4}}$ (moitié de l'aire précédente)

Exercice IV

Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-8}^{1} \mathrm{d}x$

- Première méthode, géométrique : $\displaystyle\int_{-8}^{1} \mathrm{d}x = \boxed{9}$ (aire du rectangle de hauteur 1, construit sur l(intervalle $[-8~;~1]$)
- Deuxième méthode : on pose $f(x)=1$ donc $\displaystyle\int_{-8}^{1} \mathrm{d}x = \int_{-8}^{1} 1\,\mathrm{d}x = \int_{-8}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.
  Une primitive de f est F avec $F(x)=x$.
  Alors : $\displaystyle\int_{-8}^{1} \mathrm{d}x = F(1)-F(-8) = 1-(-8) = \boxed{9}$

b) $\boxed{\displaystyle\int_{1}^{7} \pi\,\mathrm{d}x = 6\pi}$ (aire d'un rectangle de hauteur π construite sur l'intervalle $[1~;~7]$)

c) $\displaystyle\int_{1}^{4} (3x-4)\,\mathrm{d}x = \int 1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ en posant $f(x)=3x-4$.

Une primitive est $F(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 4x$.

$\displaystyle\int_{1}^{4} (3x-4)\,\mathrm{d}x = F(4)-F(1) = (24-16) - \left(\frac{3}{2}-4\right) = \boxed{\frac{21}{2}}$

d) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(4x^2+1\right)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ avec $f(x)=4x^2+1$.

Une primitive de f est $F(x) = \dfrac{4}{3}x^3 + x$.

$\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = F(2)-F(0) = \left(\frac{32}{3}+2\right) - 0 = \boxed{\frac{38}{3}}$

e) $\displaystyle\int_0^2 \left(4+2\mathrm{e}^y\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^2 f(y)\,\mathrm{d}y$ avec $f(y) = 4+2\mathrm{e}^y$.
Une primitive de f est $F(y) = 4y + 2\mathrm{e}^y$.

$$\int_0^2 \left(4+2\mathrm{e}^y\right)\,\mathrm{d}y = F(2) - F(0) =$$

f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\,\mathrm{d}x$

Exercice V

Soit f la fonction f définie sur $[1\,;\,5]$ par $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[1\,;\,4]$.

Exercice VI

Calculer, en unités d'aire, l'aire de la surface colorée construite ci-dessous dans une repère orthonrmé et délimitée par les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5-(x-2)^2$ et $g(x) = -x+1$.