Feuille d'exercices n° 4 (théorème des valeurs intermédiaires)

Exercice I

Résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x-3)(x+5)$
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
$x-3=0 \Leftrightarrow x=3$; $x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$.
L'équation a deux solutions : -5 et 3 : $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\,;\,3\}}$

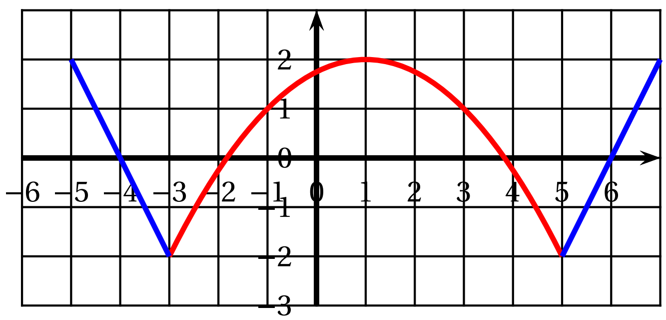
b) $f(x) = x^2-9=0 \Leftrightarrow x^3-3^2=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)=0$ (identité remarquable).
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-3\,;\,3\}}$

c) $f(x) = x^2-7x=0 \Leftrightarrow x(x-7)=0$.
$\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,7\}}$

d) $f(x) = x^2-35x=0 \Leftrightarrow x(x-35)=0$
$\boxed{\mathscr{S} = \{0\,;\,35\}}$

Exercice II

Soit f une fonction définie sur $[-5\,;\,7]$ dont la courbe représentative est tracée ci-dessous.



Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
On voit qu'il y a quatre solutions.
Elles valent -4 ; -2 ; 4 ; 6 (plus précis que des encadrements par des intervalles !)

Exercice III

Le tableau de variation d'une fonction continue f est donné ci-dessous.

x	-2	3	5
Variation de f	6 ↘	-1	↗ 2

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle [-2 ; 5] :

a) $f(x) = 0$.
Sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$, $f(-2) = 6 > 0$ et $f(3) = -1 < 0$. Comme f est continue, on eut appliquer le théorème de valeurs intermédiaires :
L'équation $f(x) = 0$ admet (au moins une solution sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$).
Comme f est décroissante sur cet intervalle, la solution est unique.
De même, l'équation admet une solution unique sur l(intervalle $[3\ ;\ 5]$.

b) $f(x) = 4$ a une seule solution sur l'intervalle $[-2\ ;\ 3]$

c) $f(x) = -3$ n'a pas de solution, car le minimum de f est -1.

Exercice IV

Le tableau de variation d'une fonction continue f est donné ci-dessous.

x	-5	2	5	9
$f(x)$	-10	5	$2,5$	15

Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations suivantes sur l'intervalle [-2; 5] :

a) $f(x) = -9$ n'a qu'une solution sur l'intervalle $[-5\ ;\ 2]$ car f est continue sur cet intervalle, $f(-5) < -9$ et $f(2) > -9$. De plus, f est monotone sur cet intervalle.
Sur $[2\ ;\ 9]$, $f(x) \geqslant 2,5$ donc l'équation $f(x) = -9$ n'a pas de solution.

b) $f(x) = 3$ a trois solutions, une dans chacun des intervalles $[-5\ ;\ 2]$, $[2\ ;\ 5]$ et $[5\ ;\ 9]$.

c) $f(x) = 18$ n'a pas de solution, car le maximum de f est 15 sur l'intervalle $[-5\ ;\ 9]$.

Exercice V

Soit f une fonction continue sur [-3; 4].
On sait que $f(-3) = -2$ et $f(4) = 5$.

- f est continue.
- $f(-3) = -2 < 0$
- $f(4) = 5 > 0$

D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Exercice VI

Soit f une fonction continue sur [-5; 8].
On sait que $f(-3) = 5$, $f(1) = -2$ et $f(5) = 7$.

- Sur l'intervalle $[3\ ;\ 1]$, f est continue, $f(-3) = 5 > 0$ et $f(1) = -2 < 0$.
  D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ 1]$.

- De même :
  Sur l'intervalle $[1\,;\,5]$, f est continue, $f(1) = -2 < 0$ et $f(5) = 7 > 0$.
  D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1\,;\,5]$.

Exercice VII

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 1.$$

1. $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}$ (voir cours de Première ou prochain chapitre)
2. - f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0\,;\,1]$ comme fonction polynôme.
   - $f(0) = -1 < 0$
   - $f(1) = 1 > 0$

   D'après le théorème de valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   Comme f est croissante sur cet intervalle, cette solution est unique. On la note x_0
3. f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc cette solution est unique sur $\mathbb{R}$.
4. À la calculatrice, on trouve : $f(0,68) \approx -0{,}005\,568$ et $f(0,69) \approx 0{,}018\,509$.
   On en déduit $\boxed{0,68 < x_0 < 0,69}$