Correction du contrôle

Exercice I (3 points)

Une entreprise produit des composants électroniques, dont on estime que 5 % d'entre eux sont défectueux.
On prélève 10 composants parmi le stock. On suppose que le stock est assez grand pour que cette sélection soit assimilée à un tirage avec remise dans le stock. On note X le nombre de composants défectueux ainsi piochés.

1) On a répétition d'épreuves identiques, indépendantes, à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n=10\ ;\ p=0,05)$.

2) On sait que $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $=\binom{10}{k}\times 0,05^k\times 0,95^{n-k}$.
Alors, la probabilité qu'aucune pièce ne soit défectueuse est $p(X=0)=0,95^{10}\approx \boxed{0.599}$

3) $p(X\leqslant 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)$.

- $p(X=0)\approx 0,599$
- $p(X=1)=\binom{10}{1}\times 0,05^1\times 0,95^9\approx 0.315$
- $p(X=2)=\binom{10}{2}\times 0,05^2\times 0,95^8\approx 0.075$

On en déduit : $\boxed{p(X\leqslant 2)\approx 0.988}$

Exercice II (2 points)

Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln(3)$:

a) $\ln(27)=\ln\left(3^3\right)=\boxed{3\ln 3}$

b) $\ln\left(\frac{1}{9}\right)=-\ln 9=-\ln\left(3^2\right)=\boxed{-2\ln 3}$

c) $\ln\left(\sqrt{3}\right)-2\ln(3)=\frac{1}{2}\ln 3-2\ln 3=\boxed{-\frac{3}{2}\ln 3}$

Exercice III (3 points)

Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(x+1)=0$ (pour $x>-1$)
$\ln(x+1)=0 \iff \ln(x+1)=\ln 1 \iff x+1=1$
$\iff x=0$;
$\boxed{\mathscr{S}=\{0\}}$

b) $\ln(4x)=\ln(x-3)$ pour $x>3$
$\ln(4x)=\ln(x-3)$
$\iff 4x=x-3$
$\iff 3x=-3$
$\iff x=-1<3$ donc ce n'est pas possible ; $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$

c) $\ln(x+5)=7$ pour $x>-5$
$\ln(x+5)=7$
$\iff \ln(x+5)=\mathrm{e}^7$
$\iff x+5=\mathrm{e}^7$
$\iff x=\mathrm{e}^7-5>-5$; $\boxed{\mathscr{S}=\{\mathrm{e}^7-5\}}$

Exercice IV (3 points)

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'expression de la dérivée $f'(x)$:

a) $f(x)=x\ln(x)$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$f=uv$ avec $\begin{cases} u(x=x \\ v(x)=\ln x) \end{cases}$.

$f'=u'v+uv'$ avec $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$.

Alors : $f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}$ donc $\boxed{f'(x)=\ln x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$f=\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x=x \\ v(x)=\ln x) \end{cases}$.

$f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v'(x)=\frac{1}{x} \end{cases}$.

Alors : $f'(x)=\dfrac{1\times\ln x-x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$ donc $\boxed{f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}}$

Exercice V (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,(\ln(x) - 1)\,.$$

1. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc, par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$
2. $f'(x) = 1 \times (\ln x - 1) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \boxed{\ln x}$
3. • $f'(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1$
   • $f'(x) = 0 \iff \ln x > 0 \iff x > 1$
   • $f'(x) < 0 \iff x < 1$
4. Tabeau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

5. $\boxed{f(\mathrm{e}) = 0}$
6. Tabeau de signes de f :

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice VI (4 points)

Pour chacune des fonctions f suivantes, trouver une primitive F.

1) $f(x) = x^3 + 5x + 7$ sur $\mathbb{R}$.

   Une primitive est définie par $\boxed{F(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{5}{2}x^2 + 7x}$.

2) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Une primitive est : $\boxed{F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + \ln(x)}$

3) $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x^3}$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

   Une primitive est : $\boxed{F(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2x^2}}$.