Exercices sur les probabilités conditionnelles et sur 'indépendance

Exercice I

A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire. Dans chacun des cas suivants, calculer $p(A)$.

1. $p(A \cap B) = \frac{1}{3}$ et $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{1}{4}$.
2. $p_B(A) = \frac{1}{2}$, $p_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{6}$ et $p(B) = \frac{2}{5}$
3. $p_A(B) = 0,3$,$p_B(A) = 0,1$ et $p(B) = 0,6$.

Exercice II

Dans un tiroir se trouvent 24 chaussettes rouges et 24 chaussettes noires.
La pièce étant plongée dans le noir, combien faudra-t-il prendre de chaussettes pour être sûr d'avoir une paire de la même couleur ?

Exercice III

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,2$

1. A et B sont-ils indépendants ?
2. Calculer $p_A(B)$.

Exercice IV

On lance successivement deux dés équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. Est-ce une succession de deux épreuves indépendantes ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux 6 lors des deux lancers ?

Exercice V

Une alarme incendie possède les propriétés suivantes : en cas de détection de fumée, elle se déclenche avec une probabilité égale à 0,99, mais elle se déclenche également en l'absence de fumée avec une probabilité égale à 0,02.
On suppose que la probabilité d'incendie est égale à 0,001.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : « Un incendie se déclare et l'alarme se déclenche ».

Exercice VI

Une urne contient quatre boules vertes et cinq boules jaunes indiscernables au toucher.
On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise.
Soient A l'évènement « La première boule tirée est verte » et B l'évènement « La deuxième boule tirée est jaune ».

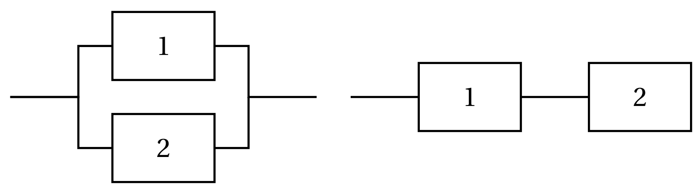
1. Calculer $p(A)$ et $p_A(B)$.
2. En déduire $p(A \cap B)$.

Exercice VII Antilles-Guyane juin 2015 (extrait)

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que
$P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

Exercice VIII Asie juin 2013 (extrait)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

— évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
— évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
— évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. (a) Quelle est la probabilité de l'évènement $B \cap \overline{S}$?
   (b) Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à $0,88$.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
   Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Exercice IX Liban juin 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\frac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\frac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^e partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \frac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \frac{7}{16}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$.
3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

   Quelle conjecture peut -on émettre ?
4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.
   (c) La suite $\left(p_n\right)$ converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.