Suites : feuille d'exercices (2)
(suites aritmético-géométriques et limites)

I

Dans un pays, un organisme étudie l'évolution de la population. Compte tenu des naissances et des décès, on a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quitte.
En 2020, la population de ce pays était de 75 millions d'habitants. On suppose que l'évolution ultérieure obéit au modèle ci-dessus.
On note P_n la population de l'année $(20210+n)$ exprimée en milliers d'habitants.

1. 1) Déterminer les trois premiers termes de la suite. Cette suite est-elle géométrique? Arithmétique? justifier votre réponse.
2. Donner la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n .
3. On définit la suite (U_n) $U_n = P_n + 500$.
   Montrer que (U_n) est une suite géométrique.
4. Donner la formule explicite de U_n.
5. En déduire la formule explicite de P_n.
6. Combien d'habitants peut-on prévoir en 2025?
7. Au bout de combien d'années la population aura-t-telle doublée?

II Bac ES Liban mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.

Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.

En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1. (a) Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.
2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.
   On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

L1	Variables :	n est un nombre entier naturel
L2		U est un nombre réel
L3		Traitement : Affecter à n la valeur 0
L4		Affecter à U la valeur 75
L5		Tant que $U \leqslant 100$ faire
L6		n prend la valeur $n+1$
L7		U prend la valeur $1,12U - 6$
L8		Fin Tant que
L9	Sortie :	Afficher …

(a) Recopier et compléter la ligne L9.

(b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

(c) Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$.
On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

(b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

(c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.

(d) Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

III

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

a) $u_n = (4n-3)(7-8n)$

b) $u_n = 3n^2 - 5n + 3$

c) $u_n = -7n^2 + 2n - 3$

d) $u_n = \dfrac{4n^2 - 5n + 1}{n+2}$

e) $u_n = \dfrac{3n^2 + 7}{5n^2 - 4}$

f) $u_n = \dfrac{5n+7}{3n^2+1}$

IV

On considère deux suites définie par : $\begin{cases} u_0 = 200 \\ u_{n+1} = 1,05u_n \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 250 \\ v_{n+1} = v_n - 0,05v_n \end{cases}$.

Déterminer le terme général de ces deux suites et trouver leurs limites.