

Feuille d'exercices sur les équations différentielles

Équations différentielles

Exercice I

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction f donnée est solution de l'équation différentielle (E) donnée :

- $f : x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$ et (E) : $y' = 6x - 2$
- $g : x \mapsto \ln(x) + 2$ et (E) : $y' = \frac{1}{x}$
- $h : x \mapsto e^x + x$ et (E) : $y' = e^x + 1$

Exercice II

Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' = 3x^2 - 5$
- $y' = e^x + 3$
- $y' = -3e^{-3x} + 7$

Exercice III

Dans chaque cas, résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' = x^2 - 5x + 3$ et $y(0) = 2$
- $y' = e^x + 1$ et $y(0) = 3$
- $y' = e^{3x+2}$ et $y(0) = 1$

Primitives

Exercice IV

Trouver dans chaque cas, toutes les primitives de la fonction proposée sur l'intervalle donné :

- $f(x) = 6$ sur \mathbb{R}
- $f(x) = 5x + 3$ sur \mathbb{R}
- $h(x) = 3e^x$ sur \mathbb{R}
- $k(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice V

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
 $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 12x - 5$.
Déterminer une primitive F de f sur \mathbb{R} .
- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{5}{x^2}$.
Déterminer une primitive F de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice VI

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = \ln(x)$.

- Vérifier que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $F(x) = x \ln(x) - x$ est une solution de l'équation différentielle (E).
- En déduire toutes les primitives de $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.
- Déterminer l'unique primitive G de f vérifiant $G(1) = 2$.

Exercice VII

Dans chaque cas, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle donné :

- $F(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ et $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 7$ sur \mathbb{R} .
- $F(x) = x^2 + 2\sqrt{x}$ et $f(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0; +\infty[$.
- $F(x) = \frac{3x-2}{5x+7}$ et $f(x) = \frac{31}{(5x+7)^2}$ sur $]-\frac{7}{5}; +\infty[$
- $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x-5}$ et $f(x) = e^{3x-5}$ sur \mathbb{R} .

Exercice VIII VRAI OU FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et justifier la réponse?.

- La fonction carré est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$.
- La fonction carré est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x + 1$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ la fonction $x : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
- La fonction $x \mapsto x^3 - x^2 - e^{-x}$ est la primitive sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + e^{-x}$ qui vaut -1 en 0.

Exercice IX

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Montrer que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Équations différentielles $y' = ay + b$

Exercice X

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $y' - 4y = 0$
- $5y' + 4y = 0$
- $y' = -4y + 3$
- $y' = \frac{1}{3}y - 1$

Exercice XI

Résoudre les équations différentielles suivantes en tenant compte de la condition initiale proposée :

- $y' = 3y$ et $y(0) = 1$
- $y' = -2y$ et $y(0) = -1$
- $y' - 2y - 1 = 0$ et $y(0) = 1$