Feuille d'exercices (dérivation) nº 3

Exercice I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 11x + 12$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice II

Soit h la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $h(x) = 7 - \dfrac{10}{5-x}$.

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathscr{D}$, et déterminer sa fonction dérivée h'.
2. Étudier, pour tout réel $x \neq 5$, le signe de $h'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Exercice III

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 56x - 24$.

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée g'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $g'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 11x + 12$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'.
2. Étudier, pour tout réel x, le signe de $f'(x)$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Exercice V

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - x$.

1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée g'.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier la réponse à la question précédente en traçant la courbe de la fonction g sur la calculatrice graphique.

Exercice VI

Même exercice que le précédent avec la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 + 2x$.

Exercice VII

Même exercice que le précédent avec la fonction $g : x \mapsto -2x^3 + x^2 + 8x - 7$.

Exercice VIII

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3 + 9x$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f admet un maximum local en une valeur que l'on déterminera et un minimum local en une autre valeur que l'on déterminera.

Exercice IX

Une entreprise fabrique et vend des montres. Elle en produit chaque jour entre 2 et 24.
On note x le nombre de montres produites et vendues par jour.
On appelle $C(x)$ le coût total journalier de fabrication en euros.
La fonction C est définie par $C(x) = x^2 - 4x + 169$.
On appelle **coût unitaire moyen** $C_m(x)$ le coût de fabrication d'une montre lorsqu'on en produit x.
Il est donné par $C_m(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.

1. À quel intervalle I appartient le nombre x ?
2. Démontrer que la fonction C_m est définie sur I par
$$C_m(x) = x - 4 + \frac{169}{x}.$$
3. Justifier que C_m est dérivable sur I et déterminer, pour tout réel x de I, $C'_m(x)$.
4. Dresser le tableau de signes de $C_m(x)$ sur I.
5. En déduire le nombre de montres que l'entreprise doit fabriquer pour avoir un coût moyen minimal.

Exercice X

Soit g la fonction définie sur $\mathscr{D} = \left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ par :
$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{2}{2x+3}.$$

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathscr{D}$, et montrer que, pour tout réel x de $\mathscr{D}$, $g'(x) = \dfrac{x^2 + 3x - \frac{7}{4}}{(2x+3)^2}$.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathscr{D}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathscr{D}$ et dresser son tableau de variation.