Lois de probabilités discrètes

Table des matières

I Conditionnement et indépendance

I.1 Rappels sur les probabilités conditionnelles

Définition d'une probabilité conditionnelle

$p_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé.
On dit que c'est une probabilité conditionnelle.

Exemple

On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif.
On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

- M : « La personne a assisté à la séance du matin ».
- D : « La personne a payé demi-tarif ».

	Plein tarif	Demi Tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est : $p_D(M) = \dfrac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.
De même, $p_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\dfrac{91}{194}$.
.

Définition

La propriété de B sachant que A est réalisé est $p_A(B) = \dfrac{p[A \cap B]}{p(A)}$

Remarque : on lit souvent « probabilité de B sachant A »

Propriété

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

- $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ et $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$
- $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$

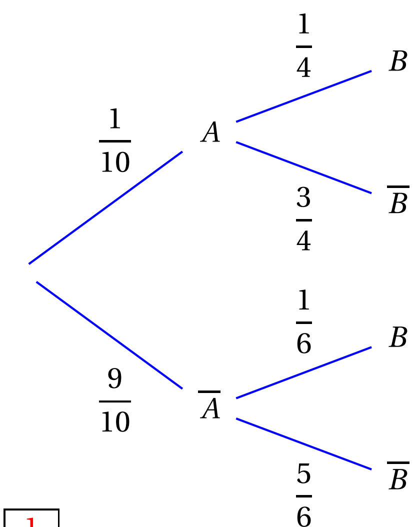
Exemple :

On considère un jeu dans lequel on lance d'abord un dé à 10 faces puis :

- si le résultat est 10, on lance un dé à 4 faces ;
- sinon on lance un dé à 6 faces.

On gagne lorsque le résultat du deuxième dé est 1.
On considère les événements A : « Le résultat du premier dé est 10 » et B : « le joueur gagne ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{10} = \boxed{\dfrac{1}{40}}$.

3. On veut calculer $p(B)$;
$= (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$.
On a réunion de deux événements incompatibles, donc la probabilité de cette réunion est la somme des probabilités.
$p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p\left(\overline{A}\right) = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{9}{10} = \dfrac{1}{40} + \dfrac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times 2 \times 10} = \dfrac{1}{40} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{7}{40}$.
La probabilité de gagner est $\boxed{p(B) = \dfrac{7}{40}}$

I.2 Formule des probabilités totales

Propriété (formule des robabilités totales)

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Soieit des événements A_1, A_2, $\ldots A_n$ des évenements de Ω, deux à deux disjoints (d'intersection vide) et dont la réunion forme l'univers Ω.
On dit que cesévénements forment une partition de Ω.
Soit B un événement.
Alors : $p(B) = p\left(A_1 \cap B\right) + p\left(A_2 \cap B\right) + p\left(A_3 \cap B\right) + \cdots + p\left(A_n \cap B\right)$

I.3 Indépendance de deux événements

Définition

Soient deux événements A et B de probabilités non nulles.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété

A et B sont indépendants équivaut à $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

A n'a pas d'influence sur B et B n'a pas d'influence sur A.

II Loi uniforme discrète

II.1 Définition

Définition

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω et à valeurs dans $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,\cdots\,;\,n\}$.
On dit que X suit la loi uniforme sur $\{1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,n\}$ lorsque :
Pour tout $k \in \{1\,;\,2\,;\,\cdots\,;\,n\}$, $p(X = k) = \dfrac{1}{n}$

Exemple

Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. On tire au hasard une boule de cette urne.

X est la variable aléatoire qui prend la valeur inscrite sur la boule. Quelle est la loi suivie par X ?

Comme on tire au hasard, une boule, chaque boule a la même probabilité d'être tirée (situation. d'équio-probabiité).
Pour tout k compris entre 1 et 15, $p(X = k) = \dfrac{1}{15}$.
X suit la loi uniforme sur $\{1\,;\,2\cdots\,;\,15\}$

II.2 Espérance

Définition générale

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.
Lespérance de X, notée $E(X)$ vaut :

$$E(X) = x_1 \times p\,(X = x_1) + x_2 \times p\,(X = x_2) + \cdots + x_n \times p\,(X = x_n)$$

On écrit souvent : $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$ en notant p_i la probabilité $p(X = x_i)$.

Exemple : On lance deux dés tétraédriques équilibrés numérotés de 1 à 4. On note $(a\,;\ b)$ l'issue « le résultat obtenu par le premier dé est a et le résultat obtenu par le second dé est b ».
On définit une variable aléatoire X par $X(a\,;\ b) = a + b$ (somme des résultats obtenus).
On peut résumer la situation par un tableau à double entrée :

a \ b	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Les valeurs que X peut prendre sont : 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8.
Notons-les x_1, x_2, $\ldots x_7$ dans cet ordre.
Alors, par exemple, $p_3 = p\,(X = 3) = \dfrac{2}{16}$, $p(X = 4) = \dfrac{3}{16}$.
La loi de X est alors résumée dans le tableau suivant :

x_i	2	3	4	5	6	7	8
$P\,(X = x_i)$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8}$	$\dfrac{1}{16}$

L'espérance de X est alors :
$E(X) = \dfrac{1}{16} \times 2 + \dfrac{2}{16} \times 3 + \dfrac{3}{16} \times 4 + \dfrac{4}{16} \times 5 + \dfrac{3}{16} \times 6 + \dfrac{2}{16} \times 7 + \dfrac{1}{16} \times 8 = \dfrac{80}{16} = \boxed{5}$.

Remarque : Ainsi, sur un grand nombre de lancers de ces deux dés, « la loi des grands nombres » permet de dire qu'on peut s'attendre à ce que la moyenne des sommes soit proche de 5.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{1\ ;\ 2\ ;\ \cdots\ ;\ n\}$.
Alors : $\boxed{E(X) = \dfrac{n+1}{2}}$.

Justification : $E(x) = 1 \times \dfrac{1}{n} + 2 \times \dfrac{1}{n} + \cdots + n \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n} = \dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \dfrac{n+1}{2}$.

III Loi et schéma de Bernoulli

III.1 Loi de Bernoulli

Définition

On appelle épreuve de Bernoulli un expérience aléatoire comportant deux issues, noté S pour succès et $\overline{S}$ pour échec.

Propriété

Si p est la probabilité d'un succès, la probabilité d'un échec est $1-p$.

III.2 Schéma de Bernoulli

Définition

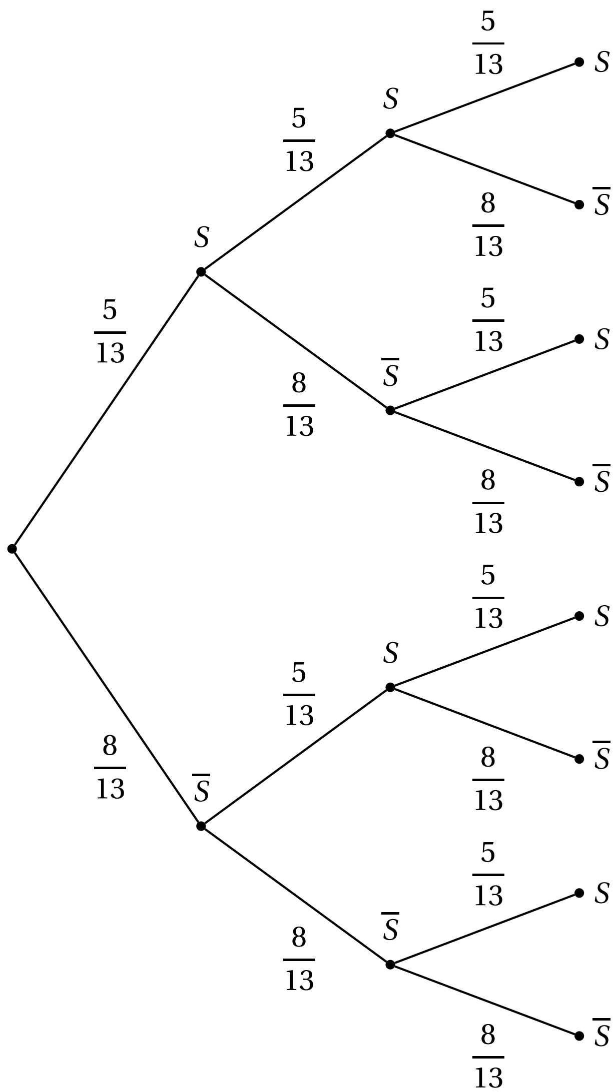
Soit n un entier naturel?
On appelle schéma de Bernoulli la répétition de n épreuves de Bernoulli consécutives, identiques, indépendantes.
Il est caractérisé par deux paramètres, n le nombre d'épreuves et p, la probabilité d'un succès.

Exemple : Sur le trajet que fait un élève en vélo pour aller de chez lui au lycée, il y a trois croisements successifs avec des feux tricolores non synchronisés. Pour chacun des feux, le rouge dure 30 secondes, le l'orange deux secondes et le vert 20 secondes.
On suppose que la couleur d'un feu ne dépend pas de la couleur précédente et que l'élève s'arrête au feu orange et au feu rouge.

a) Quelle est la probabilité que l'élève ne s'arrête à aucun feu?

b) Quelle est la probabilité que l'élève s'arrête à un seul feu?

Notons Sl'événement « arriver devant un feu vert ».
$p(S)=\dfrac{20}{52}=\dfrac{5}{13}$ Arbre :



- La probabilité que l'élève ne s'arrête à aucun feu est $p(SSS) = \left(\dfrac{5}{13}\right)^3 = \boxed{\dfrac{125}{2\,197}}$.
- « L'élève s'arrête à seul feu » est constitué de $SS\overline{S}$, $\overline{S}S\overline{S}$ ou $SS\overline{S}$.

  Sa probabilité est $3 \times \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 \times \dfrac{8}{13} = \boxed{\dfrac{600}{2\,197}}$

III.3 Coefficients binomiaux

Dans l'exemple précédent (feux tricolores), on a vu qu'il y avait trois événements contenant deux succès (deux feux verts).
Il était facile de compter directement le nombre d'événements qui nous intéressaient. C'est moi facile dans le cas où n est grand (arbre impossible à faire, car trop grand).
Il faut trouver un moyen de trouver le nombre de chemins comprenant k succès parmi n.

Définition

Soit n un entier naturel et p un nombre appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
On considère un schéma de Bernoulli, de paramètres n et p.
Le nombre de façons d'obtenuir k succès (et donc $n-k$ échecs) s'appelle coefficient binomial. Il est noté $\binom{n}{p}$ et se lit « k parmi n ».

Dans l'exemple précédent sur les feux tricolores, on a :

- $\binom{3}{0} = 1$ (un seul trajet avec 0 succès)
- $\binom{3}{1} = 3$ (trois trajets avec un succès)
- $\binom{3}{2} = 3$ (deux trajets avec deux succès)
- $\binom{3}{3} = 1$ (un seul trajet avec trois succès)

Propriétés

Pour tout entier naturel n et pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:

- $\binom{n}{0} = 1$ (un seul chemin contenant n succès pour n épreuves)
- $\binom{n}{n} = 1$ (un seul chemin contenant 0 succès pour n épreuves)
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie)
- Si $k \neq 0$: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (propériété d'addition)

En utilisant la propriété d'addition, on peut calculer les coefficients binomiaux de proche en proche en utilisant le **triangle de Pascal** .

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Exemples :

a) On donne $\binom{25}{3} = 2\,300$; on en déduit $\binom{25}{22} = \binom{25}{25-3} = \binom{25}{22} = \boxed{2\,300}$.

b) $\boxed{\binom{100}{0} = 1}$

c) On sait que $\binom{9}{6} = 84$ et $\binom{9}{7} = 36$.

On en déduit que $\binom{10}{7} = \binom{9}{6} + \binom{9}{7} = 84 + 36 = \boxed{120}$

IV Loi binomiale

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in [0\,;\,1]$.
On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors des n répétitions.
ON dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, notés $\mathscr{B}(n\,;\,p)$.

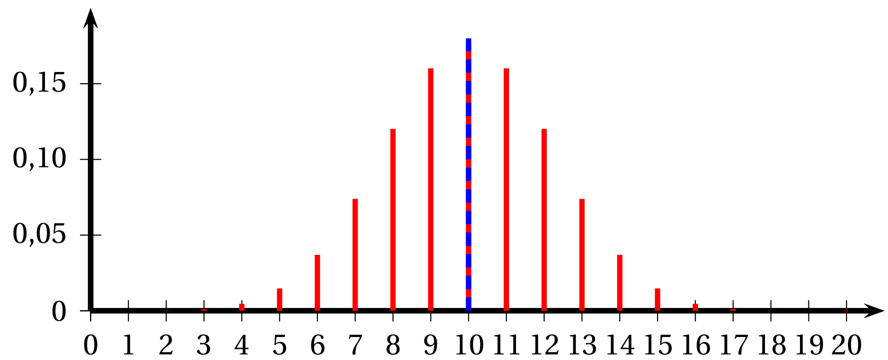
Propriété

Si X suit la loi $\mathscr{B}(\,;\,)$:

$p(X = k) = \binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k}$.

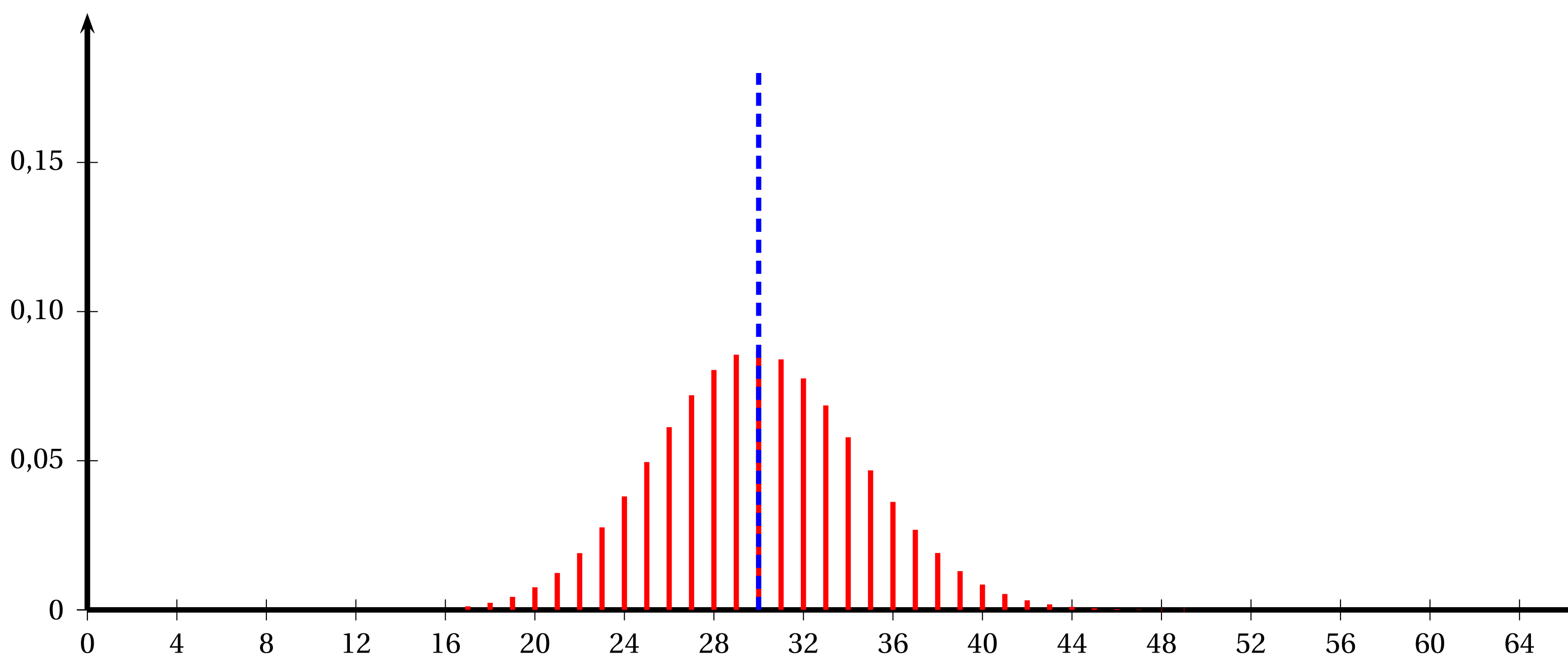
IV.1 Représentation graphique

Loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,5)$



Le graphique admet un axe de symétrie, d'équation $x = 10$ car l'espérance est $\mu = np = 10$

Loi binomiale $\mathscr{B}(100\,;\,0,3)$



Le graphique admet un axe de symétrie, d'équation $x = 30$ car l'espérance est $\mu = np = 30$

IV.2 Espérance, variance et écart-type

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant un li binomiale $\mathscr{B}(n\,;\ p)$.

- L'espérance est $E(X) = np$. (Correspond à la moyenne)
- La variance est $V(X) = np^1 - p$
- L'épar-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$ (l'écart-type mesure la dispersion autour de l'espérane)

V Loi géométrique

V.1 Définition et caractéristiques

Définition

Soit p un réel de $[0\,;\ 1]$.
On répète une épreuve de Bernoulli, dans la probabilité de succès est p.
On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de répétitions nécessaires pour obtenir le premier succès.
On dit que la variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètres p.
On écrit : X suit $\mathscr{G}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$

Propriété

Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, $\boxed{p(X=k) = p \times (1-p)^{k-1}}$

V.2 Représentation géométrique

V.3 Espérance, variance, écart-type

Propriété

On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
- $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$

V.4 Exemples

Exemple 1 : Au basket, n joueur réussit 68 % de ses lancers francs.
Les lancers sont supposés indépendants. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires avant d'en réussir un.

1. Montrer que l'on peut modéliser la situation par une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
2. Quelle est la probabilité qu'il réussisse son panier au bout du quatrième essai ?
3. Il a droit à quatre essais. Quelle est la probabilité qu'il réussisse son panier avant son quatrième essai ?

Réponses

1. Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de succès l'évènement « marquer un panier de probabilité $p = 0,68$ ».
   Comme chaque lancer est indépendant du ou des lancers précédents, la variable aléatoire X égale au nombre d'essais jusqu'à ce que le joueur marque un panier suit la loi géométrique $\mathscr{B}(0,68)$.
2. La probabilité qu'il réussisse son panier au bout du quatrième essai est $p(X=4) = (1-0,68)^3 \times 0,68 \approx 0,022\,282\,24$
3. $p(X<4) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)$
   $= 0,68 + 0,32 \times 0,68 + 0,32^2 \times 0,68 = 0,68\left(1 + 0,32 + 0,32^2\right) = 0,967\,232$

Exemple 2 :
En septembre 2019, on peut lire dans le journal anglais The Sunday Mirror : En Écosse, la famille B., après la10 naissances de garçons, a eu le bonheur d'avoir une fille. Cameron.
On suppose que lors des naissances dans une famille, la probabilité d'avoir une fille ou un garçon es la même et ne dépend pas ds naissances précédentes.
Quelle était la probabilité d'avoir une fille après 10 garçons ?

- Les naissances filles-garçons étant équiprobables et indépendantes, X, nombre de garçons, suit la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- $p(X=11) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10\times\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 0,000\,488\,281\,25 \approx \boxed{0,000\,5}$