Fonction logarithme népérien

Table des matières

I Définition 1
II Courbe représentative 2
III Propriétés 3
IV Étude de la fonction logarithme 4
IV.1 Sens de variation 4
IV.2 Limites 5
IV.3 Dérivée du logarithme d'une fonction 5

I Définition

Définition

La fonction exponentielle est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0\ ;\ +\infty$. (Les images sont strictement ositives).
Pour tout réel y de $]0\ ;\ +\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = y$ admet une solution unique x appartenant à $\mathbb{R}$.
Cette solution est appelée logarithme népérien de $y$et se note $x = \ln(y)$ ou $\ln y$.
La fonction exponentielle admet donc une fonction réciproque définie sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Cette fonction s'appelle logarithme népérien et se note ln.
Ainsi :

$$\begin{array}{rcccc} \ln & : &]0\,;\,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

Propriétés

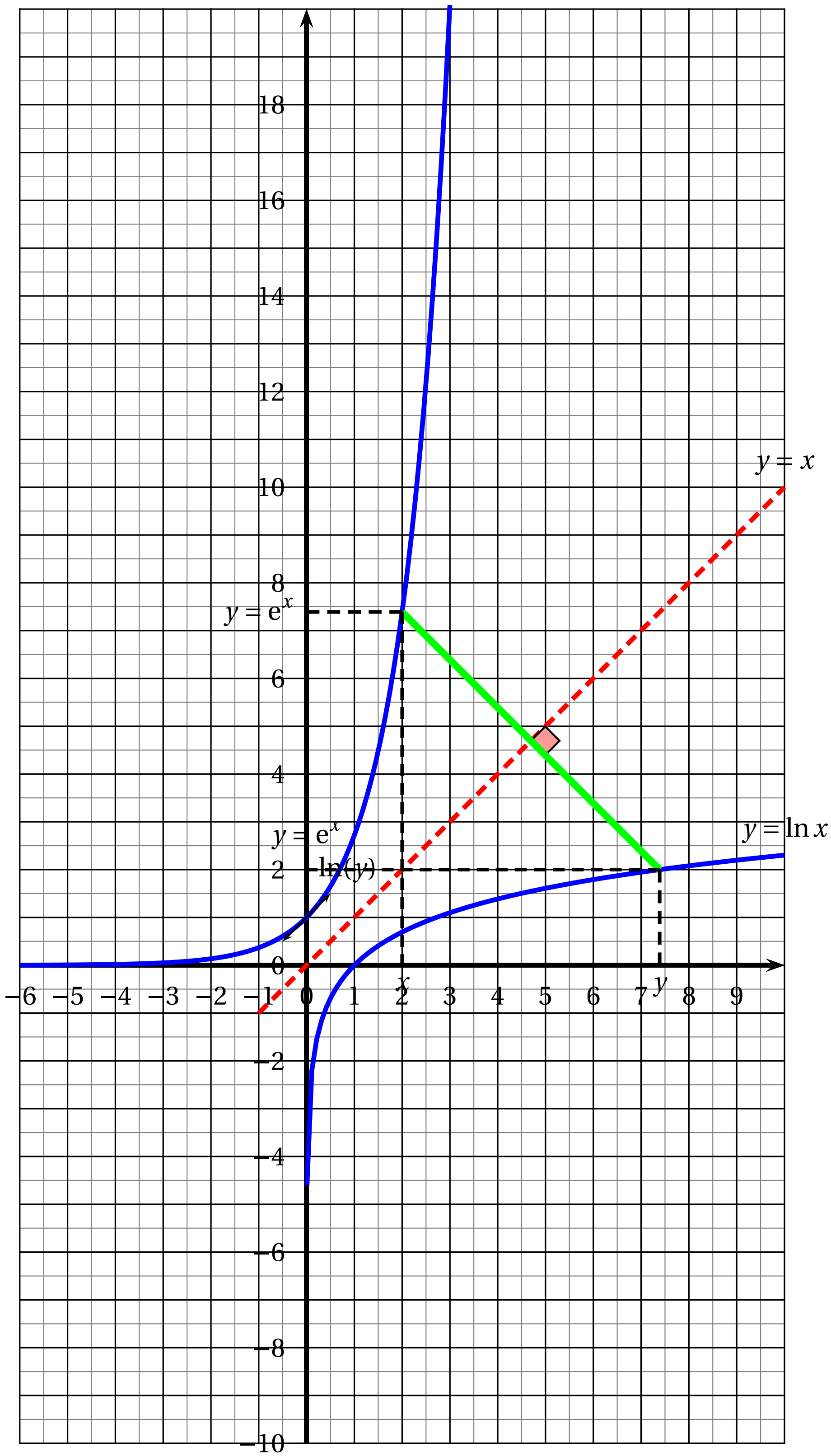
- $\ln(1) = 0$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$

En effet :

- $\mathrm{e}^0 = 1 \Leftrightarrow \ln(1) = 0$
- $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}) = 1$

II Courbe représentative

Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



III Propriétés

Propriétés algébriques (admises)

- Poour tout réel $y>0$ et tout réel x, $\mathrm{e}^x = y \Leftrightarrow x=\ln(y)$
- Pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$
- Pour tout réel x, $\ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$

Exemple 1 Résoudre les équations

(a) $\mathrm{e}^x = 3$

(b) $\mathrm{e}^x = 7$

Réponses :

(a) $\mathrm{e}^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln(3)}$

(b) $\mathrm{e}^x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x=\ln(7)}$

Exemple 2 Résoudre les équations :

(a) $\ln(x)=6$

(b) $\ln(x)=0$

Réponses :

(a) $\ln(x)=6 \Leftrightarrow \boxed{x=\mathrm{e}^6}$

(b) $\ln(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\mathrm{e}^{0=1}}$

Exemple 3 Résoudre l'équation $\ln(3x-5)=7$

- Il faut que $3x-5>0$ donc on doit avoir $x>\dfrac{3}{5}$.
- Pour $x>\dfrac{3}{5}$, $\ln(3x-5)=7 \Leftrightarrow 3x-5=\mathrm{e}^7 \Leftrightarrow 3x=5+\mathrm{e}^7 \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\mathrm{e}^7}{3}>\dfrac{3}{5}$.

  On en déduit que l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{\dfrac{5+\mathrm{e}^7}{3}\right\}}$

Propriétés fonctionnelles (admises)

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

- $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln(a)$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$
- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\dfrac{1}{2}\ln(a)$.
- Pour tout entier naturel n, $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$

Exemples :

1. Simplifier $\ln(27) - 4\ln(3)$.
   $\ln(27) - 4\ln(3) = \ln\left(3^3\right) - 4\ln(3)$
   $= 3\ln(3) - 4\ln(3) = \boxed{-\ln(3) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)}$.
2. Simplifier $\ln(8) + \ln\left(\sqrt{2}\right) - \ln(32)$.
   $\ln(8) + \ln\left(\sqrt{2}\right) - \ln(32) = \ln\left(2^3\right) + \frac{1}{2}\ln(2) - \ln\left(2^5\right) = 3\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) - 5\ln(2) = \left(3 + \frac{1}{2} - 5\right)\ln(2)$
   $= \boxed{-\frac{3}{2}\ln(2)}$

IV Étude de la fonction logarithme

IV.1 Sens de variation

Propriété admise

La fonction ln est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

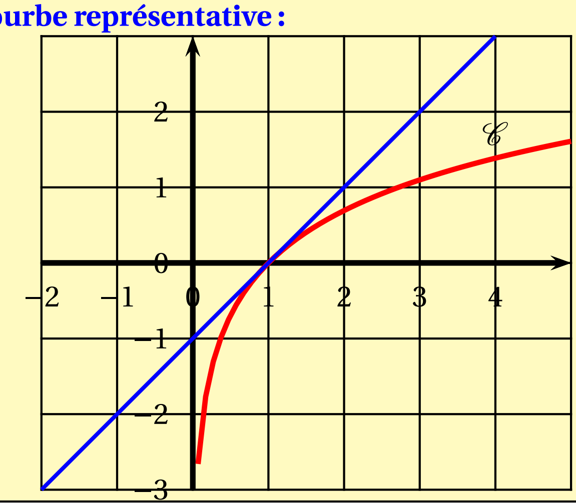
Propriété

$\ln'(x) > 0$ donc ln est croissante.

Tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Courbe représentative :



Remarque : la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$, donc passe par le point de coordonnées $(-1, 0)$.

Remarque : la fonction ln est croissante, mais croît « lentement ».
Exemple : $\ln\left(10^9\right) = 9\ln(10) \approx 20,7$

En utilisant les variations de la fonction. ln, on en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs :

- $\ln(a) \leqslant 0 \Leftrightarrow a \leqslant 1$
- $\ln(a) \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 1$
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) \leqslant \ln(b) \Leftrightarrow a \leqslant b$

IV.2 Limites

Propriétés admises

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

IV.3 Dérivée du logarithme d'une fonction

Propriété (admise)

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.

$\ln(u)$ est dérivable et $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$.

Exemple : soit $f(x) = \ln\left(x^2+5\right)$.

$f = \ln(u)$ abvec $u(x) = x^2+5$ et $u'(x) = 2x$.

$f' = \dfrac{u'}{u}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+5}}$