Correction des exercices sur les dérivées (2)

Exercice I

Soit $f : x \mapsto x|x|$.

$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h|h|}{h} = |h|$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(0+h)-f0}{h}\right) = 0$.

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice II

Soit la fonction $f : x \mapsto 6x^2 + 12x - 1$, définie sur l'intervalle [-10 ; 18].

1. $f'(x) = 6 \times 2x + 12 = 12x + 12 = \boxed{12(x+1)}$.
2. • $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$
   • $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$
3. Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

Exercice III

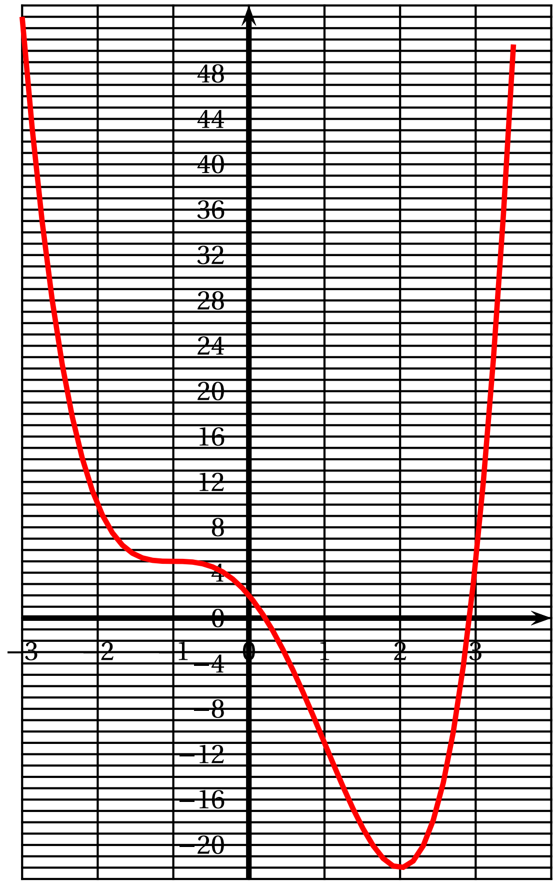
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 2.$$

1. $f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4\left(x^3 - 3x - 2\right)$.
   Or $4(x-2)(x+1)^2 = 4(x-2)\left(x^2+2x+1\right) = 4\left[x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2\right] = 4\left[x^3 - 3x - 2\right]$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x) = 4(x-2)(x+1)^2}$
2. On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x - 2$ car 4>0 et $(x+1)^2 \geqslant 0$ en s'annulant en -1.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$4(x-2)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	5	$\searrow$	-22	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction a un minimum, -22, atteint en $x = 2$.
   Remarque : la courbe représentative de f admet une tangente horizontale en -1 puisque $f'(-1) = 0$.



Exercice IV

On considère les trois fonctions f, g et h définies par :

- $f(x) = x^3 - 2x + 1$.
  $f'(x) = 3x^2 - 2 = 3\left(x^2 - \dfrac{2}{3}\right) = 3\left(x - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 2,09$	$\searrow$	$\approx -0,09$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points.

- $g(x) = x^3 - 2x - 1$.
  $g((x) = f'(x)$. On remarque que $g(x) = f(x) - 2$.
  Le tableau de variation est alors :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\approx 0,09$	$\searrow$	$\approx -2,09$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la courbe $\mathscr{C}_g$ coupe l'axe des abscisses en trois points.

- $h(x) = x^3 + 2x - 1$.
  $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$.
  h est croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

La courbe $\mathscr{C}_h$ n'a qu'un point d'intersection avec l'axe des abscisses.

Exercice V

On pose : $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x - 20$.

$\boxed{f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3 > 0}$ (somme de nombres positifs).

On en déduit que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = x^5\left(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{20}{x^5}\right)$.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{20}{x^5}\right) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x^5 + 2x^3 + 3x - 20 = 0$, donc $f(x) = 0$ admet une solution ; celle-ci est unique car f est monotone (croissante).