Correction de la feuille d'exercices sur la loi binomiale

Exercice I

1. Le forage conduit à une nappe de pétrole avec une probabilité 0,1 ou pas avec une probabilité 0,9. C'est donc bien une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,1. Il a bien que deux issues possibles.
2. (a) Les forages doivent être indépendants pour que X suive une loi binomiale.
   (b) $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^9 \approx \boxed{0,613}$

Exercice II

On considère que le tirage de 1000 résistances a lieu avec remise et que donc les tirages sont indépendants les uns des autres.
Le nombre de résistances défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0,005$.

1. $p(X = 2) = \binom{1\,000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^{998} \approx 0,084.$
2. $p(X \leqslant 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$
   $= \binom{1\,000}{0} \times 0,995^{1\,000} + \binom{1\,000}{1} \times 0,005 \times 0,005^{999} + \binom{1\,000}{2} \times 0,005^2 \times 0,995^{998} \approx 0,124.$
   Le calcul peut se faire directement à la calculatrice.
3. $p(X \geqslant 2) = 1 - p(X \leqslant 1) = 1 - \left[p(X = 0) + p(X = 1)\right] = 1 - 0,995^{1\,000} - 1\,000 \times 0,005 \times 0,995^{999} \approx 0,960.$

Exercice III

Les interrogations se font de manière indépendante les unes des autres et à chaque interrogation, la probabilité d'avoir une fille est $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ donc X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{2}{3}$.

1. Pour $n = 10$: $p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 210 \times \frac{16}{81} \times \frac{1}{729} \approx \boxed{0,057}$.
   $p(X \geqslant 4) = 1 - pp(X \leqslant 3) \approx \boxed{0,980}$.
2. Oncherche n tel que $p(X = 0) \leqslant 0,001 \Leftrightarrow \frac{1}{3^n} \leqslant 0,001 \Leftrightarrow 3^n \geqslant 1\,000$.
   À la calculatrice, on trouve $n \geqslant 7$.
   Il faut donc interroger pendant au moins 7 jours consécutifs pour que la probabilité de n'avoir aucune fille soit inférieure à 0,001.

Exercice IV

1. X étant le nombre de matchs gagnés sur les 3 joués, on a $X \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.
   De plus pour chaque match perdu,Benjamin verse 20 € donc $D = 20(3 - X) = 60 - 3X$.
   On a alors $D \in \{60 ; 40 ; 20 ; 0\}$.
2. $D = 40$ si et seulement si $X = 1$.
   Il ya trois matchs indépendants les uns des autres et pour chaque match, la probabilité que Benjamin gagne est de 0,4 donc le nombre X de match gagnés par Benjamin suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,4.
   $p(D = 40) = p(X = 1) = \binom{3}{1} \times 0,4^1 \times 0,6^2 = 3 \times 0,4 \times 0,36 = \boxed{0,432}$