maths complémentaires : correction de la feuille n° 2 (probabilités conditionnelles)

I

A et B sont deux évènements d'une même expérience aléatoire. Dans chacun des cas suivants, calculer $p(A)$.

1. $p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{7}{12}}$
2. • $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = \dfrac{1}{\cancel{2}} \times \dfrac{\cancel{2}}{5} = \dfrac{1}{5}$
   • $p\left(A \cap \overline{B}\right) = p_{\overline{B}}(A) \times p\left(\overline{B}\right) = \dfrac{1}{6}\left(1 - \dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{3}{5} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$
3. • $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = 0,1 \times 0,6 = 0,06$.
   • $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ donc $p(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p_A(B)} = \dfrac{0,06}{0,3} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$

II

On peut utiliser un arbre dans lequel on fait intervenir les couleurs des chaussettes.
On obtient : La probabilité d'avoir une paire de la même couleur est $2 \times \dfrac{1}{24} \times \dfrac{1}{23} = \dfrac{1}{276}$. .

III

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,7$ et $p(A \cap B) = 0,2$

1. $p(A) \times p(B) = 0,21 \neq p(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.
2. $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0,2}{0,3} = \dfrac{2}{3}$

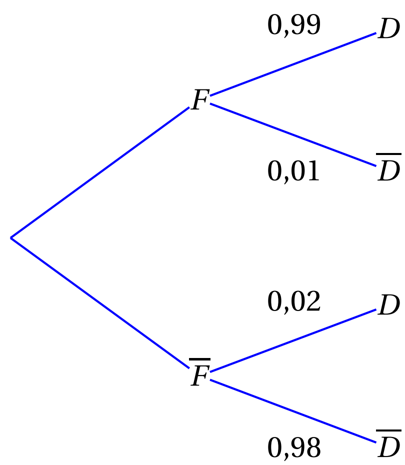
IV

On lance successivement deux dés équilibrés numérotés de 1 à 6.

1. C'est une succession de deux épreuves indépendantes.
2. La probabilité d'obtenir deux 6 lors des deux lancers est $\dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{6} = \boxed{\dfrac{1}{36}}$

V

Une alarme incendie possède les propriétés suivantes :
en cas de détection de fumée, elle se déclenche avec une probabilité égale à 0,99, mais elle se déclenche également en l'absence de fumée avec une probabilité égale à 0,02.
On suppose que la probabilité d'incendie est égale à 0,001.

1. 

2. - La probabilité d'incendie est égale à 0,001 donc $p(F \cap \overline{D}) = 0,001 \Leftrightarrow 0,01p(F) = 0,001 \Leftrightarrow \boxed{p(F) = 0,1}$.
   - $p(F \cap D) = p_F(D) \times p(F) = 0,99 \times 0,1 = \boxed{0,099}$.

VI

Une urne contient quatre boules vertes et cinq boules jaunes indiscernables au toucher.
On effectue deux tirages successifs d'une boule sans remise.
Soient A l'évènement « La première boule tirée est verte » et B l'évènement « La deuxième boule tirée est jaune ».

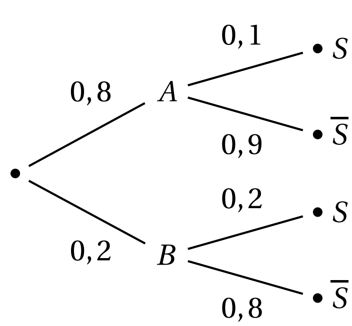
1. - $p(A) = \dfrac{4}{9}$
   - $p_A(B) = \dfrac{5}{8}$
2. $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{18}$.

VII Antilles-Guyane juin 2015 (extrait)

1. Les évènements D_1 et D_2 sont indépendants, donc :
   P(« A défaillant ») $= P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2) = 0,39 \times 0,39 = \boxed{0,1521}$.
2. Ici la probabilité est égale à :
   P(« A défaillant ») $= P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,1521 = \boxed{0,6279}$.

VIII Asie juin 2013 (extrait)

1. Le grossiste a deux fournisseurs et il y a dans chaque boîte des traces de pesticides ou non. On a donc un arbre 2×2 :



2. (a) En suivant la troisième branche :
$p\left(B \cap \overline{S}\right) = p(B) \times p_B\left(\overline{S}\right) = 0,2 \times 0,8 = \boxed{0,16}$.

(b) On calcule de même :
$p\left(A \cap \overline{S}\right) = p(A) \times p_A\left(\overline{S}\right) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.
$\{A\ ;\ B\}$ étant une partition de l'univers, on a donc :
$p\left(\overline{S}\right) = p\left(A \cap \overline{S}\right) + p\left(B \cap \overline{S}\right) = 0,72 + 0,16 = \boxed{0,88}$.

Il faut donc calculer :
$p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)}$.
On a vu que $p\left(\overline{S}\right) = 0,88$, donc $p(S) = 1 - p\left(\overline{S}\right) = 0,12$.
Donc $p_S(B) = \dfrac{0,2 \times 0,2}{0,12} = \dfrac{4}{12} = \boxed{\dfrac{1}{3}} \approx 0,33$ au centième près.

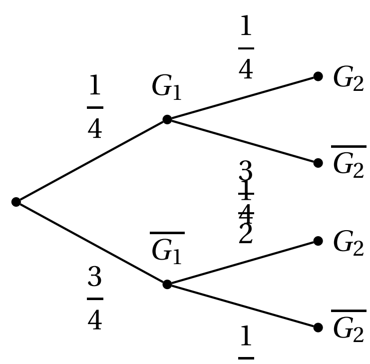
IX Liban juin 2018

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

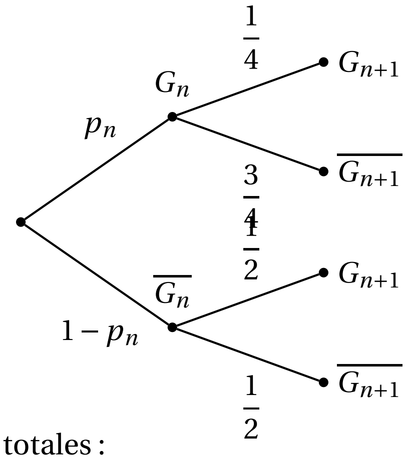
Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Illustrons la situation par un arbre :



Alors : En appliquant la formule des probabilités totales :
$p_2 = p\left(G_2\right) = p_{G_1}\left(G_2\right) p\left(G_1\right)) + p_{\overline{G_1}}\left(G_2\right) p\left(G_1\right)$
$= \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{16} + \dfrac{3}{8} = \dfrac{7}{16}$ donc $\boxed{p_2 = \dfrac{7}{16}}$

2. Arbre :



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = p\left(G_{n+1}\right) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\left(1 - p_n\right) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

Donc :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	$\frac{1}{4}$	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

On peut conjecturer que la suite converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5}$
   $= -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = \boxed{-\frac{1}{4}u_n}$ donc $\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n}$.

   La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $\boxed{q = -\frac{1}{4}}$.

   (b) $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \boxed{-\frac{3}{20}}$.

   Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n, $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

   On en déduit : $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}}$.

   (c) $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5} = \boxed{0,4}$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.