Correction des exercices (feuille 2)

I

On a constaté que la population a un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille.
De plus, chaque année, 12 000 personnes arrivent dans ce pays et 5 000 le quittent.
En 2020, P_n la population de l'année $(2020+n)$ exprimée en milliers d'habitants.

1. • $P_0 = 75\,000$
   • Un taux d'accroissement naturel et annuel de 14 pour mille correspond à un coefficient multiplicateur égal à 1,014 , donc :
   $P_1 = P_0 \times 1,014 + 12 - 5 = 1,\text{ř}04 \times 75000 + 7 = 76\,057$
   • De même : $P_2 = 1,014 \times P_1 + 7 = 77\,128{,}798$.
   • $P_1 - P_0 = 76\,057 - 75\,000 = 1\,057$ et $P_2 - P_1 = 77\,128{,}798 - 76\,057 = 1\,071{,}798$.
   $P_2 - P_1 \neq P_1 - P_0$: cette suite n'est pas arithmétique.
   • $\dfrac{P_1}{P_0} \approx 10{,}014\,093\,3$ et $\dfrac{P_2}{P_1} \approx 1{,}014\,092$.
   Ces deux quotients ne sont pas égaux : cette suite n'est pas géométrique
2. On a : $\boxed{P_{n+1} = 1,014P_n + 7}$
3. On pose $U_n = P_n + 500$.
   Pour tout n, $U_{n+1} = P_{n+1} + 500 = 1,014P_n + 7 + 500 = 1,014P_n + 507$
   $= 1,014\left(P_n + \dfrac{507}{1,014}\right) = 1,014\,(P_n + 500) = \boxed{1,014U_n}$.
   (U_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}014$ et de premier terme $U_0 = P_0 + 500 = 75\,500$.
4. Pour tout n, $U_n = U_0 q^n = \boxed{75\,500 \times 1,014^n}$.
   Par conséquent : $U_n = P_n - 500 = \boxed{75\,500 \times 1,014^n - 500}$.
5. En 2025, la population serait $P_5 \approx 86\,435{,}066$, soit 86 435 066 habitants environ.
6. À la calculatrice, on trouve que la population aura doublé au bout de 50 ans.

II Liban ES mai 2016

1. (a) $u_0 = 75$, donc en 2016 $u_1 = u_0 \times 1,12 - 6 = 75 \times 1,12 - 684 - 6 = 78$.
   (b) D'une année sur l'autre l'augmentation est de 12 %, donc le nombre de contrats est multiplié par $1 + \dfrac{12}{100} = 1 + 0,12 = 1,12$ et ce nombre est diminué par les 6 résiliations, donc

$$u_{n+1} = 1,12u_n - 6.$$

2. (a) Afficher n ou afficher $2015 + n$ année où le nombre de contrats dépassera 100.
   (b)

Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6	7
Valeur de U	75	78	81	85	89	94	99	105

   (c) En 2022 le nombre de contrats sera de 105 : il faudra donc embaucher du personnel.
3. (a) On a pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 50 = 1,12u_n - 6 - 50 = 1,12u_n - 56 = 1,12\left(u_n - \dfrac{56}{1,12}\right)$
   $= 1,12\,(u_n - 50) = \boxed{1,12v_n}$.
   L'égalité $v_{n+1} = 1,12v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12, de premier terme $v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$.

(b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

On sait qu'alors pour tout entier naturel n : $v_n = 25 \times 1,12^n$.

Or $v_n = u_n - 50 \iff u_n = v_n + 50$, donc finalement pour tout naturel n :

$$u_n = 50 + 25 \times 1,12^n.$$

(c) Il faut ré"soudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $u_n > 100$:

$u_n > 100 \iff 50 + 25 \times 1,12^n > 100 \iff 25 \times 1,12^n > 50 \iff 1,12^n > 2 \iff$
$n \ln 1,12 > \ln 2 \iff n > \dfrac{\ln 2}{\ln 1,12}$. Or $\dfrac{\ln 2}{\ln 1,12} \approx 6,1$. Il faut prendre au moins $n = 7$.

(d) On retrouve bien le fait qu'en 2022 (soit pour $n = 7$), le nombre de contrats dépassant 100, il faudra embaucher du personnel.