Correction de la feuille d'exercices de révision sur la fonction exponentielle

Exercice I

Déterminer le sens de variation des fonctions f et g définies par :

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-3}$.
$f = \mathrm{e}^{u}$ donc $f' = u'\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = 2x-3$ et $u'(x) = 2$.
$f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x-3} > 0$ donc f est croissante.

b) $g(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
De même $g'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x} < 0$ donc g est décroissante.

Exercice II Équations

Résoudre les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{x} = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0$; $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.

b) $\mathrm{e}^{3x-5} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x-5} = \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow 3x-5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$.
$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{5}{3}\right\}}$

c) $\mathrm{e}^{x} = -1$; il n'y a pas de solution car, pour tout x, $\mathrm{e}^{x} > 0$, $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

d) $\mathrm{e}^{2x+3} = \mathrm{e} \Leftrightarrow 2x+3 = 1$ car $\mathrm{e}+\mathrm{e}^{1}$ donc $x = -1$; $\boxed{\mathscr{S} = \{-1\}}$

e) $\mathrm{e}^{-2x+3} - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2x+3} = 1 = \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow -2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$; $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}}$

Exercice III

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{x} \leqslant \mathrm{e}^{3} \leqslant x \leqslant 3$; $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,3]}$

b) $\mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^{3x-5} \Leftrightarrow 2x+1 \leqslant 3x-5 \Leftrightarrow 6 \leqslant x$; $\boxed{\mathscr{S} = [6\,;\,+\infty[}$

c) $\mathrm{e}^{-x+3} \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x+3} \leqslant \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow -x+3 \leqslant 0 \Leftrightarrow 3 \leqslant x$; $\boxed{\mathscr{S} = [3\,;\,+\infty[}$

d) $\mathrm{e}^{5x} \geqslant 0$; tous les nombres sont solutions puisque 'exponentielle est une fonction strictement positive.
$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$

Exercice IV

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} - x$.

- $f'(x) = \mathrm{e}^{x} - 1$.
- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x} < 1 \Leftrightarrow x < 0$

- f est continue.

  $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

  $f(x) = \mathrm{e}^x\left(1 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$; on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

  Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $[0\,;\,+\infty[$.